Klausur Mathematik für Ingenieure C1

WS 2020/21

- Erlaubte Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DIN A4 Blatt.
- Ab 18 Punkten ist die Klausur mit Sicherheit bestanden (Gesamtpunktzahl: 36 Punkte).

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (3,5+2+4,5 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{2+j}{2-3j}, \qquad z_2 = j^{99} + 2j^{101} - 2.$$

b) Stellen Sie die folgende Menge zeichnerisch in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(jz) \leq \pi\}$$

c) Stellen Sie die komplexe Zahl $z := -2j$ in Polarkoordinaten dar. Geben Sie alle zweiten Wurzeln von z zuerst in der Polarkoordinatendarstellung und anschließend in Normalform an. (Hinweis: $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$)

Aufgabe 2: Vektorräume und Lineare Abbildungen (4+4 Punkte)

Gegeben seien im folgenden $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

a) Ist $U := \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie gegebenfalls eine Basis für U.

b) Ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)^\top) := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

linear? Bestimmen Sie gegebenfalls eine Basis für ihren Kern.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3: Determinanten und Rang von Matrizen (2,5+3,5+3 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(3A)$. 0

0 b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert die Inverse A^{-1}? Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse A^{-1}.

c) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(B)$ und $\dim(\mathrm{Kern}(B))$.

Aufgabe 4: Eigenwerte und Eigenvektoren (2+7 Punkte):

Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

b) Die Matrix B besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Berechnen Sie jeweils alle Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten und geben Sie die entsprechenden Eigenräume an.