Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwertaufgabe)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)\,,$$

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\,x^4 + x^2 - \alpha\,x\,y + y^2$$

a) Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $\alpha > 0$, alle stationären Punkte (=die kritischen Stellen) von f.

b) Einer der stationären Punkte in a) ist $(x,y) = (0,0)$.
Bestimmen Sie (wieder in Abhängigkeit von $\alpha > 0$) ob dieser stationäre Punkt $(0,0)$ lokale Maximalstelle oder lokale Minimalstelle ist oder weder noch.
Bemerkung: Alle anderen ggf. vorhandenen stationären Punkte können Sie ignorieren; betrachten Sie nur $(x,y) = (0,0)$.

(5+5=10 Punkte)

A2) (Kurvenintegral)

Berechnen Sie für das Skalarfeld

$$f(x,y,z) = x\,e^z - y^2$$

und die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}\,, \quad t \in [\,0, \frac{1}{2}\,]$$

das Kurvenintegral

$$I = \int\limits_\Gamma f\,ds\,.$$

Zur Kontrolle: Für $f(\vec{\gamma}(t))$ sollten Sie eine Differenz von zwei Exponentialtermen bekommen.
Hinweis: Wenn Sie das Integral korrekt aufgestellt haben, sollte es sich mittels Substitutionsregel berechnen lassen.

(6 Punkte)

A3) (Lineares Programm, Simplex-Tableau)

Wir betrachten das folgende Simplex-Tableau eines linearen Optimierungsproblems in der Notation aus der Vorlesung:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ \hline 5 & 1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

a) Interpretieren Sie das Tableau:

(i) Geben Sie die Basis (=Menge $\mathcal{B}$ der Indizes), die zu dem Tableau gehört, an.

(ii) Geben Sie den Koordinatenvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$ ("Basislösung") an, der zu obigem Tableau gehört.

(iii) Geben Sie den Wert der Zielfunktion an, der zum aktuellen Koordinatenvektor gehört.

b) Überlegen Sie, was beim nächsten Basiswechsel $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ passiert:

(i) Welcher Index wird in die Basis aufgenommen?

(ii) Welcher Index verlässt die Basis?

Hinweis zu A3: Angabe der Ergebnisse reicht; es sind keine Begründungen/Rechnungen verlangt.

(5×1 = 5 Punkte)

A4) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'''(t) - y(t) = 0\,.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t\,.$$

Bemerkung: Je nachdem, welchen Rechenweg Sie einschlagen, *könnte* es sein, dass Sie Stammfunktionen benötigen. Sie können dann benutzen:
$\int t\, e^{-at}\, dt = -\frac{1}{a^2}(at+1)e^{-at}$, $\int t^2\, e^{-at}\, dt = -\frac{1}{a^3}(a^2t^2+2at+2)e^{-at}$, $a \neq 0$.

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = A\,\vec{y}(t) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle: Die Matrix hat zwei Eigenwerte, und die sind ganzzahlig.

(3+5+6=14 Punkte)

****** **** Bitte wenden **** ******

A5) (Algebra)

a) Finden Sie im Ring $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$

   (i) Das Additiv-Inverse von $[3]_{10}$,

   (ii) Das Multiplikativ-Inverse von $[3]_{10}$.

   Bemerkung zu a): Angabe der Ergebnisse reicht; Angabe des Rechenweges nicht erforderlich.

b) Hat $[15]_{100}$ in $(\mathbb{Z}_{100}, \cdot)$ ein Inverses? (Kurze Begründung der Antwort)

c) Berechnen Sie das Multiplikativ-Inverse von $[214]_{479}$. Der Rechenweg sollte erkennbar sein.

d) Wie viele Elemente hat die Gruppe $\mathbb{Z}_{360}^*$?

e) (i) Geben Sie in der Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, +)$ ein Element der Ordnung 5 an, oder begründen Sie kurz, warum es kein solches Element geben kann.

   (ii) Geben Sie in der Gruppe $(\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ ein Element der Ordnung 5 an, oder begründen Sie kurz, warum es kein solches Element geben kann.

(2+1+4+2+2=11 Punkte)

(Summe: 46 Punkte)