A1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$; $f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \alpha xy + y^2$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

a) Alle stationären Punkte (= kritische Stellen)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 + 2x - \alpha y \\ -\alpha x + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\alpha}{2}x \underset{\text{II in I}}{\Rightarrow} 2x^3 + 2x - \frac{1}{2}\alpha^2 x = 0 \quad \text{II}^*$$

II^*: 1. Lösung: $x_1^* = 0$

2.3. Lösung: $x \neq 0$

$$2x^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 0$$

$$x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 1}$$, beachte $\alpha \geq 2$ muss erfüllt sein

Antwort:

- $\alpha < 2$: $(0,0)$ einziger stationärer Punkt
- $\alpha \geq 2$: 3 stationäre Punkte $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 1}, \pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - 1}\right)$

b) $(x,y) = (0,0)$ lok. Min/Max?

Hessematrix: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 2 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Entscheidendes Kriterium ist die Definitheit von Hf ($\approx$ Krümmung)

EW/Char. Polynom: $p_{Hf}(\lambda) = (2-\lambda)^2 - \alpha^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \alpha$

A1b) 1. Fall ($\alpha > 2$):

Hier ist $\lambda_1 = 2 - \alpha < 0$ und $\lambda_2 = 2 + \alpha > 0$ $\Rightarrow$ Hf indefinit

$\Rightarrow$ weder Min noch Max

2. Fall ($\alpha < 2$): $\Rightarrow \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ Hf positiv definit $\Rightarrow (0,0)$ lok. Max

3. Fall ($\alpha = 2$): $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4 \Rightarrow$ Hf pos. semidefinit

$\Rightarrow$ Hf liefert uns keine Aussage über Art der Extremstelle

$\Rightarrow$ Alternative Argumentation:

$$f_{\alpha=2}(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}x^4 + (x-y)^2$$

i) hier sieht man schön, dass für $\alpha = 2$ $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ii) Weiter wissen wir $f_{\alpha=2}(0,0) = 0$

aus i) und ii) ist klar, dass $(0,0)$ für $\alpha = 2$ globale Minimalstelle ist.

A2) $\cdot f(x,y,z) = x e^z - y^2$

- Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$
- Kurvenintegral $I = \int_\Gamma f\,ds$

Lösung: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 1}$ $\quad f(\vec{\gamma}(t)) = e^t \cdot e^t - (e^{-t})^2 = e^{2t} - e^{-2t}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{1/2} f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_0^{1/2} (e^{2t} - e^{-2t}) \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 1}\, dt$$

Verwende Substitution: $u := e^{2t} + e^{-2t} + 1$, $\frac{du}{dt} = 2(e^{2t} - e^{-2t})$

$$\Rightarrow I = \int_3^{e^1 + e^{-1} + 1} \frac{1}{2} u^{1/2} dt = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} u^{3/2}\right]_3^{1+e+1/e} = \frac{1}{3}\left[(1 + e + 1/e)^{3/2} - 3^{3/2}\right]$$

13) Simplex-Tableau:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ \hline 5 & 1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

a) i) Basis des Tableaus

$B = \{3, 4\}$

(Indizes der Spalten mit "0" in 1. Zeile)

ii) Basislösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$B x \overset{!}{=} b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

iii) Zielfunktionswert

$$f(\vec{x}) = -6$$

b) Was passiert beim nächsten Basiswechsel $B \to B'$?

i) Welcher Index wird in die Basis aufgenommen?

Als neuer Basisindex kommt nur $j^* = 4$ in Frage sein (nur hier steht etwas neg. über dem Strich)

ii) Welcher Index verlässt die Basis?

Index $k^* = 5$ verlässt die Basis.

(nach Quotientenregel gilt: $9/3$ (2. Zeile) $< 8/2$ (1. Zeile)

$\Rightarrow$ 2. Zeile, und hier steht die "1" in der 5. Spalte)

A4a) Berechnen Sie reelles FS für $y'''(t) - y(t) = 0 \Longleftrightarrow y'''(t) = y(t)$

1. EW bestimmen:

etwas ausführlicher: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$ $\quad y_3 \to y''$, $y_2 \to y'$, $y_1 \to y$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = \det(A - 1\!\!1\,\lambda) = -\lambda^3 + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

$\Longrightarrow$ kompl. FS: $\{e^t, e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3})t}, e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3})t}\}$

Umwandlung in reelles FS:

Idee: $z = a + ib \Rightarrow e^a(\cos(b) + i\sin(b))$

I $e^t \to e^t$

II $e^{-\frac{1}{2}t + i\frac{\sqrt{3}}{2}t} \to e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

III $e^{-\frac{1}{2}t - i\frac{\sqrt{3}}{2}t} \to e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

Ergibt reelles FS: $\{e^t, e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right), e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right)\}$

(hier könnte man auch I und III kombinieren)

KLAUSUR LÖSUNG 4.2

A4b) Berechne allg. Lösung von $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) - t = 0$

(Tipps Stammfunktionen: $\int t e^{-at} dt = -\frac{1}{a^2}(at+1)e^{-at}$; $\int t^2 e^{-at} dt = -\frac{1}{a^3}(a^2t^2+2at+2)e^{-at}$, $a \neq 0$

Bem.: Inhomogene DGL

Zunächst hom. Anteil: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2$

$\Rightarrow$ FS: $\{e^{t}, te^{2t}\}$

inhom. Anteil: Ansatz vom „Typ der rechten Seite"

$$y_p(t) = at + b, \quad y_p'(t) = a \quad y''(t) = 0$$

in DGL $\Rightarrow$ $0 - 4a + 4(at+b) = t$ — koeffizientenvergleich

$4at + 4b - 4a = 1t + 0 \Rightarrow 4a = 1, \; b = \frac{1}{4}$

Partikuläre Lsg.: $y_p(t) = \frac{1}{4}(t+1)$

Allgemeine Lsg.: $y(t) = \underbrace{(c_1 + tc_2)e^{2t}}_{y_h(t)} + \underbrace{\frac{1}{4}(1+t)}_{y_p(t)} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

alternative inhom. Anteil: Ansatz „Variation der Konstanten"

$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$, mit y_1, y_2 hom. Lsg.

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{4t}(1+2t-2t)} e^{2t} \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Stammfunktionen mittels partieller Integration (siehe Hinweis):

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2t^2 + 2t + 1)e^{-2t} \\ -\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) = \frac{1}{4}(t+1)$$

○ ○ ○ Lösung siehe oben

A4c) Bestimme FS für $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

EW: $\underset{\det(A - \lambda \mathbb{1})}{P_A(\lambda)} = (-2-\lambda)(2-\lambda)^2 - 16(-2-\lambda)$

$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = 2 \pm 4$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 6$

Eigenvektoren und Hauptvektoren

EV zu λ_1: $(A - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdot \vec{v} \overset{!}{=} 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = 0$, $4v_2 + 4v_3 = 0$, $4v_2 + 4v_3 = 0$ $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

HV zu $\vec{v}$: $(A - \lambda_1 \mathbb{1}) \vec{w} = \vec{v}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad w_3 = -1$, $w_2 + w_3 = 0$ $\Rightarrow w_2 = -w_3$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

EV zu λ_2: $(A - \lambda_2 \mathbb{1}) \vec{u} \overset{!}{=} 0$ $\quad \begin{pmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -8u_1 = u_3$, $u_3 = u_2$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{FS: } \left\{ e^{6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

A5) Finden Sie im Ring $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$

i) Das Addidativ-Inverse von $[3]_{10}$

$-[3]_{10} = [7]_{10}$ $\quad (a * b = b * a = e, \ e$ bei Addition "0")

ii) Das Multiplikativ-Inverse zu $[3]_{10}$

$[3]_{10} = [7]_{10}$

Initialisierung: $u=1 \quad v=0 \quad s=0 \quad t=1$

$$10 = 1 \cdot 10 + 0 \cdot 3$$
$$3 = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 3$$

$q=3$ $\quad 1 = 1 \cdot 10 + (-3)3$

ggT

$$3 = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 3$$
$$1 = 1 \cdot 10 + (-3)3$$

$q=3$ $\quad 0 = (-3)\,10 + (10) \cdot 3$

$(-3)3 = 1 \mod 10$

Multiplikatives Inverses:

$[-3]_{10} \equiv [7]_{10}$

Lemma von Bezout: $ggT(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$ immer lösbar!

(verknüpft ggT, ieA, Inverses Element)

$$ggT(a,b) = u \cdot a + vb$$
$$u \cdot a = ggT(a,b) - v \cdot b$$
$$u \cdot a = ggT(a,b) \mod b$$
$$[a]_b^{-1} \text{ ex.} \Leftrightarrow ggT(a,b) = 1$$

Algo:

Initialisierung:

$u=1 \quad v=0$
$s=0 \quad t=1$

Update:

$a_{i+1} = b_i$

$b_{i+1} = \underbrace{a_i - q_i b_i}_{r_i} \quad u_{i+1} = s_i \quad s_{i+1} = u_i - q s_i$

$v_{i+1} = t_i \quad t_{i+1} = v_i - q_i t_i$

$$a = u \cdot a + v \cdot b$$
$$b = s \cdot a + t \cdot b$$
$$r = a - bq = (u - qs)a + (v - qt)b$$

$$b = s \cdot a + t \cdot b$$
$$r = (u - qs)a + (v - qt\, b)$$
$$b - qr = 0$$

b) Hat $[15]_{100}$ in $(\mathbb{Z}_{100}, \cdot)$ ein Inverses?

Nein! $ggT(100, 15) = 5$ mit Lemma von Bezout ist klar, dass kein Inverses ex.!

A5) c) Multiplikativ Inverses von $[214]_{479}$

Siehe a)

$$479 = 1 \cdot 479 + 0 \cdot 214$$
$$214 = 0 \cdot 479 + 1 \cdot 214$$

$q = 2$

$$51 = (1 - 2 \cdot 0)\, 479 + (0 - 2 \cdot 1) \cdot 214$$
$$= 1 \cdot 479 + (-2) \cdot 214$$

$$214 = 0 \cdot 479 + 1 \cdot 214$$
$$51 = 1 \cdot 479 + (-2)\, 214$$

$q = 4$

$$10 = (0 - 4 \cdot 1)\, 479 + (1 + 8)\, 214$$
$$= (-4) \cdot 479 + 9 \cdot 214$$

$$51 = 1 \cdot 479 + (-2)\, 214$$
$$10 = (-4)\, 479 + 9 \cdot 214$$

$q = 5$

$$1 = (1 + 5 \cdot 4)\, 479 + (-2 - 9 \cdot 5) \cdot 214$$

$$10 = (-4) \cdot 479 + 9 \cdot 214$$
$$1 = 21 \cdot 479 + (-47)\, 214$$

$q = 10$

$$0 = (-4 - 210)\, 479 + (9 + 470) \cdot 214$$
$$= -214 \cdot 479 + 479 \cdot 214$$

$$-47 \cdot 214 \equiv 1 \mod 479$$

$$\Rightarrow [214]^{-1}_{479} = [-47]_{479} = [432]_{479}$$

15) d) Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}_{360}^*$?

Primfaktorzerlegung: $360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 = \ldots$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$\Rightarrow \Phi(360) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3)(5-1) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$

e) i) Geben Sie in der Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, +)$ ein Element der Ordnung 5 an, oder begründen Sie kurz, warum es kein solches Element geben kann.

z.B. Betrachte Element $([1]_5, [3]_{15})$:

$5 \cdot ([1]_5, [3]_{15}) = ([1]_5, [3]_{15}) + ([1]_5, [3]_{15}) + ([1]_5, [3]_{15}) + ([1]_5, [3]_{15})$
$+ ([1]_5, [3]_{15}) = ([5]_5, [15]_{15}) = ([0]_5, [0]_{15})$

ii) Geben Sie in der Gruppe $(\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ ein Element der Ordnung 5 an, oder begründen Sie kurz, warum es kein solches Element geben kann.

Anzahl der Elemente: $\mathbb{Z}_5^*$: 4 $\quad \mathbb{Z}_{15}^* = 8$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_{15}^* = 32$

Da 5 und 32 teilerfremd sind, gibt es keine Untergruppe mit genau 5 Elementen (Satz v. Lagrange) $\Rightarrow$ kein Element 5. Ordnung.