Braindump Mathe C3 Klausur WS19/20

am 23.06.2020

A1: Extremwertaufgabe (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 4axy \\ a \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

a) Berechnen Sie, abhängig vom Parameter a, alle stationären Punkte (= die kritischen Punkte) von f und entscheiden Sie, ob die gefundenen stationären Punkte lokale Minima/Maxima oder keines von beiden sind.

b) Entscheiden Sie, abhängig vom Parameter a, ob die Funktion eine globale Extremalstelle besitzt.

(8 + 2 = 10 Punkte)

A2: Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung (10 Punkte)

Gegeben sei, in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}^+$, die Funktion:

$$\begin{gathered} g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \\ a, b \in \mathbb{R}^+ . \end{gathered}$$

Durch die Gleichung $g(x, y) = 1$ wird eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, deren Mittelpunkt der Punkt $(0, 0)$ ist. In diese Ellipse soll nun ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben werden. Ziel der Aufgabe ist es die Frage zu beantworten, welchen maximalen Flächeninhalt dieses Rechteck annehmen kann?

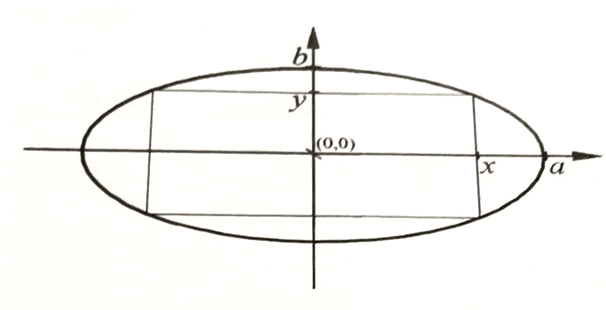

Abbildung 1: In Ellipse einbeschriebenes achsenparalleles Rechteck

a) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x,y)$, die den Flächeninhalt des Rechtecks angibt.

b) Formulieren Sie obige Fragestellung als Optimierungsproblem.

c) Lösen Sie das in *a*) formulierte Optimierungsproblem mit Hilfe des Lagrange-Formalismus.

(1 + 2 + 7 = 10 Punkte)

A3: Lineares Programm (13 Punkte)

Betrachten Sie folgendes *lineares Programm*:

$$\begin{array}{lllr} \max & x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 & \geq & -6 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Erstellen Sie für dieses Problem eine 2D-Zeichnung mit Koordinatenachsen für x_1 und x_2, in der Sie alle aus Ungleichungen resultierenden **Halbraumschnitte einzeichnen (1)**.
Markieren Sie die zulässige Menge (2) des linearen Programms (hier ein Polytyp) und zeichnen Sie den **Vektor der Zielfunktion (3)**, sowie **eine mögliche Niveaulinie (4)** ein.

b) Bringen Sie das LP in Standardform eines Minimierungsproblems.

c) Geben Sie alle **zulässigen** Basen (Spalten-Index-Mengen) des Problems an.

d) Verwenden Sie ihre Zeichnung aus Teilaufgabe *a*) und bestimmen Sie graphisch eine **optimale Basislösung (1)** des Problems und geben Sie den zugehörigen **Zielfunktionswert (2)** (des LP's in Standardform), sowie den **Vektor der optimalen Basislösung (3)** (inklusive der Werte der Schlupfvariablen) an. Ist die **Optimallösung eindeutig (4)**?

e) Kreuzen Sie für folgende Aussagen zur Dualität von Linearen Programmen an, ob diese immer zutreffen (Ja) oder nicht (Nein).

- Hat das Primale Lineare Programm einen zulässigen Punkt, so hat auch das zugehörige Duale Lineare Programm einen zulässigen Punkt.
  □ Ja □ Nein
- Hat das Primale Lineare Programm einen zulässigen Punkt, so ist das zugehörige Duale Lineare Programm beschränkt.
  □ Ja □ Nein
- Jedes zulässige Lineare Programm hat eine optimale Basislösung.
  □ Ja □ Nein
- Existieren optimale Basislösungen für das Primale Lineare Programm und das Duale Lineare Programm, dann stimmen deren optimalen Zielfunktionswerte im Betrag überein, unterscheiden sich jedoch im Vorzeichen.
  □ Ja □ Nein

(4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 13 Punkte)

A4: Differentialgleichung (7 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$y'(t) + 2ty(t) - 2t^2e^{-t^2} = 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie folgende Anfangswertaufgabe:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y(t) \quad und \quad y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3 + 4 = 7 Punkte)

A5: Algebra (12 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Gleichung:

$$4 = 158 \cdot u + 28 \cdot v\ .$$

Bestimmen Sie ein Paar $(u, v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, welches die obige Gleichung erfüllt.

b) Wir betrachten die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}^*_{21}, \cdot)$.

i) Bestimmen Sie alle Elemente der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}^*_{21}, \cdot)$.

ii) Welche der folgenden Inverse existieren demnach?
$[8]_{21}^{-1}$, $[9]_{21}^{-1}$, $[10]_{21}^{-1}$, $[14]_{21}^{-1}$, $[17]_{21}^{-1}$

iii) Berechnen Sie eines der existierenden Inversen aus *ii*).

(6 + 2 + 2 + 2 = 12 Punkte)