Analytische Zahlentheorie - Zusammenfassung des Wichtigsten (5ECTS)

Wintersemester 2014/2015

Prof. Ruppert

Autor:

- Christian Strate

Inhaltsverzeichnis

0 Über diese Zusammenfassung **4**

1 Einführung **5**
1.1 Grundlegende Eigenschaften der natürlichen und ganzen Zahlen 5
1.2 Der Fundamentalsatz der Arithmetik 5
1.3 Konstruktion neuer Primzahlen aus alten Primzahlen 5
1.4 Die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ 5
1.5 Die Landau-Symbole 6
1.6 Wie groß ist die n-te Primzahl? 6
1.7 Primzahlzwilinge 7
1.8 Kleine Abstände zwischen Primzahlen 7
1.9 Große Abstände zwischen Primzahlen 7
1.10 Primzahldrillinge 8
1.11 Die Primzahl-k-Tupel-Vermutung 8
1.12 Primzahlen als Werte von Polynomen 9
1.13 Die Goldbachsche Vermutung 11

2 Elementare Abschätzung für $\pi(x)$ **12**
2.1 Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ 12
2.2 Die Zahl M 12
2.3 Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben 13
2.4 $v_p(n!)$ - Wie oft geht p in $n!$ auf? 13
2.5 Die Zahl N 13
2.6 Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten 14
2.7 Das Verhalten der Funktion $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ im Intervall $[p_n, p_{n+1})$ 14
2.8 Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n 14
2.9 Die Zahl und das Betrandsche Postulat 14
2.10 Ungleichungen für $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ 15

3 Weitere Summenfunktionen **16**
3.1 Partielle Summation 16
3.2 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum\limits_{n\leq x} \frac{1}{n}$ 16
3.3 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum\limits_{n\leq x} \log n$ 17
3.4 Die Von-Mangold-Funktion $\Lambda(n)$ und $x \mapsto \sum\limits_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$ 18
3.5 Die Primzahlsummenfunktion $x \mapsto \sum\limits_{p\leq x} \frac{\log p}{p}$ 18
3.6 Die Primzahlsummenfunktion $\sum\limits_{p\leq x} \frac{1}{p}$ 19
3.7 Die Produkfunktion $x \mapsto \prod\limits_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ 19

3.8 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \leq x} \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ und das Dirichletsche Teilerproblem . . 20
3.9 Eine zum Primzahlsatz äquivalente Aussage 20
3.10 Der Satz von Axer 20
3.11 Die Anzahl $\omega(n)$ der verschiedenen Primteiler von n 21

4 Dirichlet-Reihen **22**
4.1 Einführung 22
4.2 Konvergenz von Dirichlet-Reihen 22
4.3 Die einer Dirichlet-Reihe zugeordnete Funktion 24
4.4 Multiplikation von Dirichlet-Reihen 26
4.5 Anwendung auf die Zeta-Funktion 28
4.6 Integraldarstellung 29

0 Über diese Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung hält fest was ich vor der Prüfungsvorbereitung für potentiell relevant hielt. Die tatsächliche Prüfungsrelevanz ist häufig nicht gegeben. Ferner handelt es sich hierbei lediglich um eine inoffizielle Zusammenfassung von Studenten, weshalb weder Garantie auf Vollständigkeit noch auf Korrektheit gewährleistet werden. Insbesondere ist dies eine Zusammenfassung über den 5-ECTS-Stoff.

1 Einführung

1.1 Grundlegende Eigenschaften der natürlichen und ganzen Zahlen

- Modulo-Regeln
- euklidischer und erweiterter euklidischer Algorithmus

1.2 Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Fundamentalsatz der Arithmetik:
Jede natürliche Zahl ist eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar: $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$

$$\gcd(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}$$
$$\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_o)}$$

$\gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b) = a \cdot b$, da $\min(\alpha_p,\beta_p) + \max(\alpha_p,\beta_p) = \alpha_p + \beta_p$

1.3 Konstruktion neuer Primzahlen aus alten Primzahlen

Nette Zahlenfolge zur Primzahlfindung:
Es ist unbekannt, ob diese Folge sämtliche Primzahlen enthält.
$q_1 := 2, q_2 := 3, q_{r+1} := \min\{p : p | q_1 q_2 \dots q_r - 1\}$
$3, 5, 29, 11, 7, 13, 37, \dots$

Mersennesche Zahlen M_n:
Die Folge $M_n = 2^n - 1$

Mersennesche Primzahl M_p:
Primzahl $M_p = 2^p - 1$, wobei p eine Primzahl sein muss, damit M_p eine sein kann.
$\Rightarrow 2^p - 1 \in$ prime $\Rightarrow p \in$ prime

1.4 Die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$

$\pi(x), x \in \mathbb{R}$:
$\pi(x) = \#\{p \leq x\}$

Primzahlsatz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

logarithmisches Integral $li(x)$:

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{li}(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \le 3\sqrt{x}\log x, x \ge 2$Unter Annahme der Riehmanschen Vermutung

1.5 Die Landau-Symbole

Die Definitionen aus KompAlg:

Asymtotische obere Schranke:

$$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c > 0.\ \exists n_0 > 0.\ \forall n > n_9.\ f(n) \le c \cdot g(n)$$

Asymtotische Vernachlässigbarkeit:

$$f \in o(g) \Leftrightarrow \forall c > 0.\ \exists n_0 > 0.\ \forall n > n_0.\ f(n) \le c \cdot g(n)$$

Asymptotische untere Schranke:

$$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \exists c > 0.\ \exists n_0 > 0.\ \forall n > n_0.\ f(n) \ge c \cdot g(n)$$

Asymtotische Dominanz:

$$f \in \omega(g) \Leftrightarrow \forall c > 0.\ \exists n_0 > 0.\ \forall n > n_0.\ f(n) \ge c \cdot g(n)$$

Asymtotische scharfe Schranke:

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c_0 > 0.\ \exists c_1 > 0.\ \exists n_0 > 0.\ \forall n > n_0.\ c_0 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 \cdot g(n)$$

1.6 Wie groß ist die n-te Primzahl?

Satz:

$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow p_n \sim n\log n$

d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1$

1.7 Primzahlzwilinge

Primzahlzwillinge:

Wenn $(p, p+2)$ beides Primzahlen sind.
Die ersten Primzahlzwilinge neben $(2, 3)$ sind (3,5) , (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41, 43), (59, 61), (71, 71), (101, 103), ...
$\pi_2(x) = \#\{(p, p+2) : p \leq x\}$
Man vermutet, dass es unendlich viele Primzahlzwilinge gibt.
Es wird weiterhin vermutet, dass $\pi_2(x) \sim c \cdot \frac{x}{(\log x)^2} \sim c \int\limits_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$
mit einer Konstanten $c = 2 \cdot \prod\limits_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1.320\ldots$

1.8 Kleine Abstände zwischen Primzahlen

Hier gibt es eine Tabelle über Häufigkeit von Abständen zweier aufeinanderfolgender Primzahlen. Interessant hierbei ist ein ziemlich genau alle 6-Intervallschritte ein Peek existiert. D.h. Abstände 6,12,18,... treten häufiger auf als ihre umgebenen Abstände. Diese Peek-Abstände verschieben sich gelegentlich, allerdings setzt sich das “alle sechs Schritte” weiterhin fort.

Zur Zeit gibt es eine bewiesene Schranke (diese besagt allerdings nicht, dass jeder Abstand so klein wird):
$\lim\limits_{n \to \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 600$

1.9 Große Abstände zwischen Primzahlen

Wie groß kann der Abstand $p_{n+1} - p_n$ werden? Tabelle.

Satz:

Dieser Satz zeigt, wie man beliebig große Intervalle finden kann, die keine Primzahl enthalten.
Ist $m \geq 2$, so sind alle Zahlen zwischen $m! + 2$ und $m! + m$ zusammengesetzt. Dh. das Intervall $[m! + 2, m! + m]$ enthält keine Primzahl.

Satz:

Wir verfeinern das Argument etwas

Sei $k \geq 3$ und $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Folge der Primzahlen.

1. Alle Zahlen zwischen $p_1 \cdots p_k - p_{k-1} - 1$ und $p_1 \cdots p_k - 2$ sind zusammengesetzt
2. Sei $n = n(k)$ so gewählt, dass p_n die größte Primzahl $\leq p_1 \cdots p_k - 2$ ist. Dann gilt $p_n \leq p_1 \cdots p_k - p_k - 2$ und $p_{n+1} \geq p_1 \cdots p_k - 1$
3. Es ist $\boxed{p_{n+1} - p_n \geq p_k + 1}$ und $\frac{p_{n(k)+1} - p_{n(k)}}{\log p_{n(k)}} \geq \frac{p_k}{\log(p_1 \cdots p_k)}$)

Der Satz liefert sofort folgende Folgerungen dank $\lim\limits_{k \to \infty} p_k = \infty$:

- $\limsup\limits_{n \to \infty} (p_{n+1} - p_n) = \infty$ (benachbarte Primzahl-Abstände werden beliebig groß)
- Gültigkeit des Primzahlsatzes vorausgesetzt!
  $\limsup\limits_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} \geq 1$

1.10 Primzahldrillinge

Primzahldrillinge:

Primzahl-Tripel $(p, p+2, p+4)$
Sind $p, p+2, p+4$ Primzahlen, so ist $(p, p+2, p+4) = (3, 5, 7)$

Tatsächlich gibt es Primzahltripel der Bauart $(p, p+2, p+6), (5, 7, 11), (11, 13, 17), (17, 19, 23), (41, 43, 47), \ldots$ Wir werden diese Vorgehensweise verallgemeinern.

Lemma:

Ist $a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$, so ist unter den Zahlen $a, a+d, a+2d$ genau eine durch 3 teilbar.

Beweis: Möglich ist $d \equiv 1 \ mod \ 3$ oder $d \equiv 2 \ mod \ 3$

- Fall $a \equiv 1 \ mod \ 3, \quad d \equiv 1 \ mod \ 3:$
  $a \equiv 1 \ mod \ 3: \quad 3 \nmid a$
  $a + d \equiv 2 \ mod \ 3: \quad 3 \nmid a + d$
  $a + 2d \equiv 0 \ mod \ 3: \quad 3 | a + 2d$
- Rest analog
  $1007, 1008, 1009. \quad 1007, 1009, 1011$

1.11 Die Primzahl-k-Tupel-Vermutung

Frage:

Seien $a_1 < a_2 \cdots < a_k, \ a_1, \ldots a_k \in \mathbb{Z}$
Ist es möglich, dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ein rein Primzahl-Elementiges k-Tupel zu finden, so dass $(n + a_1, n + a_2, \ldots, n + a_k)$?

Zulässigkeit eines k-Tupels:

Wenn für alle Primzahlen l die Bilder der $a_i \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ nicht ganz $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ sind. D.h. $\left\{\overline{a_1}^{\mod l}, \dots, \overline{a_k}^{\mod l}\right\} \neq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}^{\mod l}, \overline{1}^{\mod l}, \dots \overline{l-1}^{\mod l}\right\}$
Dies ist für $l > k$ trivial erfüllt. Darüber hinaus erfüllt wenn
$\forall l \leq k \exists u_l \in \mathbb{Z}.\ a_1 \not\equiv u_l \mod l, \quad a_2 \not\equiv u_l \mod l, \quad \dots, a_k \not\equiv u_l \mod l$

Beispiele:

1. $(a_1, a_2) = (0, 2)$ zulässig, da $a_i \not\equiv 1 \mod 2$ für $i = 1, 2$
2. $(a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 4)$ nicht zulässig, da modulo 3 gilt $\overline{0} = \overline{0}, \overline{4} = \overline{1}, \overline{2} = \overline{2}$
3. $(a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 6)$ zulässig, da $a_i \not\equiv 1 \mod 2, a_i \not\equiv 1 \mod 3$

Weitere Lemma dazu:

- Ist $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 < \dots < a_k$, so ist auch $(a_1 + m, \dots, a_k + m)$ ein zulässiges Tupel
- Falls $(a_1, \dots, a_k), (\in \mathbb{Z}^k, a_1 < \dots < a_k)$ **kein** zulässiges k-Tupel, dann $\exists l \leq k, l \in$ Prime und $\left\{\overline{a_1}^{\mod l}, \cdots, \overline{a_k}^{\mod l}\right\} = \left\{\overline{0}^{\mod l}, \dots \overline{l-1}^{\mod l}\right\}$
- Sei nun l eine solch feste Primzahl
$\forall n \in \mathbb{Z} \exists i(n) \in \{1, \dots, k\}, l | n + a_{i(n)}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, n > k - a_0$ ist $n + a_{i(n)}$ zusammengesetzt, da $l | n + a_{i(n)}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, n > k - a_0$, besteht das k-Tupel $(n + a_1, n + a_2, \dots, n + a_k)$ nicht nur aus Primzahlen
- Falls $(p_1, \dots, p_k)$, ein zulässiges k-Tupel, und $p_1 > k$, dann ist dieses k-Tupel zulässig.

Primzahl-k-Tupel-Vermutung:

Für $k \geq 2$ ist diese Vermutung unbewiesen.
Ist $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 < \dots a_k$ ein zulässiges k-Tupel, so gibt es unendlich viele Primzahl-k-Tupel der Gestalt $(p_1, \dots, p_k) = (n + a_1, \dots n + a_k)$

1.12 Primzahlen als Werte von Polynomen

Satz:

Ist $f = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$ ein nichtkonstantes Polynom mit $a_i, d \in \mathbb{Z}$, so enthält die Menge $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nur Primzahlen.

Satz:

Es gibt unendlich viele Primzahlen $\equiv -1 \mod 4$, also $4n-1$ und $\equiv -1 \mod 6$, also $6n-1$

Dirichletscher Primzahlsatz:

Ist $a, b \in \mathbb{Z}, ggT(a,b) = 1$ so gibt es unendlich viele Primzahlen der Gestalt $a \cdot n + b$

Satz:

Über Polynome vom Grad ≥ 2 ist nichts wirklich bewiesen.

Frage:

Wann kann ein Polynom $f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$ nicht unendlich viele Primzahlen darstellen.

- Ist $f(x) = g(x)h(x)$, so hat die Zahl $f(n)$ eine (im Allgemeinen) nicht triviale Faktorisierung
- Ist der höchste Koeffizient negativ, so wird $f(n)$ für große n negativ und kann keine Primzahl sein
- Ist $\gcd(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0) > 1$, so gibt es nur endlich viele Primzahlen der Gestalt $f(n)$
- Falls $\gcd(\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}) > 1$, so kann es nicht unendlich viele Primzahlen der Gestalt $f(n)$ geben

Irriduzibles Polynom:

Lässt sich nicht als Produkt zweier nichtkonstanter Polynome schreiben.

Vermutung von Bouniakowsky:

Ist $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreduziebel mit positivem höchsten Koeffizienten und $\gcd\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} = 1$, so enthält die Menge $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich viele Primzahlen

Hypothese H - Schinzels Hypothese:

Seien $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzible Polynome mit höchstem Koeffizienten > 0, so dass $\gcd\left(\left\{\left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(n) : n \in \mathbb{Z}\right\}\right) = 1$, dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass alle Zahlen $f_1(n), \ldots, f_k(n)$ Primzahlen sind.

Satz:

Sei $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ ein zulässiges k-Tupel mit $(a_1 < \ldots < a_k)$, dann gilt:

- Polynome $x + a_1, \ldots, x + a_k$ erfüllen Vorraussetzung der Hypothese H.
- Gilt diese Hypothese, so gilt die Primzahl-k-Tupel-Vermutung, d.h. es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass das k-Tupel nur aus Primzahlen besteht.
  Weiterhin gibt es dann unendlich viele Primzahlzwillinge, Primzahltrippel $(p, p+2, p+6)$ und $(p, p+4, p+6)$

Satz:

Gilt die Hypothese H, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl m Primzahlen p, q mit $m = \frac{p+1}{q+1}$

Lemma:

Ist p eine ungerade Primzahl, so gilt $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \equiv \begin{cases} 1 \mod p, & p \equiv 1,7 \mod 8 \\ -1 \mod p, & p \equiv 3,5 \mod 8 \end{cases}$

Satz:

- Sind für ein $n \geq 2$ die Zahlen $p = 4n-1, q = 8n-1$ Primzahlen, so ist q ein nichttrivialer Teiler von $M_p = 2^p - 1$ und M_p ist zusammengesetzt
- Gilt die Hypothese H, so tritt der erste Fall unendlich oft auf. Und es gibt unendlich viele Primzahlen p, sodass $M_p = 2^p - 1$ zusammengesetzt ist.

1.13 Die Goldbachsche Vermutung

Goldbachsche-Vermutung:

Jede gerade Zahl $n \geq 4$ ist Summe zweier Primzahlen

Satz:

Jede gerade Zahl lässt sich als Summe von höchstens 6 Primzahlen schreiben

Ternäre Goldbachsche-Vermutung:

Jede ungerade Zahl $n \geq 7$ ist Summe dreier Primzahlen. Ist die Goldbachsche-Vermutung korrekt, so auch diese

Satz:

Jede ungerade natürliche Zahl > 1 lässt sich als Summe von höchstens 5 Primzahlen darstellen

2 Elementare Abschätzung für $\pi(x)$

2.1 Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt$$

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p = \sum_{\substack{p,k\ge 1\\ p^k \le x}} \log p$$

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt$$

$$\vartheta(x) < \log 4 \cdot x \le 1.3863 \cdot x$$

$$\psi(x) \ge (x-2)\log 2 - \log(x+1)$$

$$0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \overset{x\ge 3}{\le} \pi(x) \overset{x>1}{\le} 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}$$

Beispiel $x = 10$:

für $\le x \Rightarrow p : 2, 3, 5, 7 \Rightarrow 2, 3, 2^2, 5, 7, 2^3, 3^2$

$\vartheta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 \qquad \psi(x) = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7$

Satz:

- Existiert für $x \to \infty$ der Grenzwert einer der Funktionen $\frac{\pi(x)\log x}{x}, \frac{\vartheta(x)}{x}, \frac{\psi(x)}{x}$, so existieren alle drei Grenzwerte und diese sind gleich
- $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow \vartheta(x) \sim x \Leftrightarrow \psi(x) \sim x$

2.2 Die Zahl M

Lemma - Für $m \ge q$:

sei $M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$

Dann gilt $\prod_{m+1<p\le 2m+1} p | M, \qquad M < 4^m$

Lemma - Für $m \ge 1$ gilt:

$\vartheta(2m+1) - \vartheta(m+1) < m\log 4$

Satz:

$\vartheta(x) < \log 4 \cdot x$

$\prod_{p \leq x} p < 4^x$

2.3 Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben

2.4 $v_p(n!)$ - Wie oft geht p in $n!$ auf?

$v_p(n), n \in \mathbb{Z}$ ist die p-adische Bewertung. Diese bestimmt wie häufig eine Primzahl p in n vorkommt.

Lemma - Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Beispiel:

Wie viele am Schluss anhängende Nullen hat 1000! in der Dezimaldarstellung?

$v_5(1000!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{1000}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{625} \right\rfloor = 249$

$v_2(1000!) = 994$

$10^{249} | 1000!$, aber $10^{250} \nmid 1000!$ Die Anzahl Nullen beträgt also 249.

Beispiel Übung:

z.Z. $\nexists n \in \mathbb{N}$. $n!$ enthält in der Dezimaldarstellung genau 777 Nullen am Schluss.

$v_5(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor$. Diese Abbildung $n \mapsto v_5(n!)$ ist monoton steigend.

$v_5(3124!) = 776, v_5(3125!) = 781$.

Entsprechend existiert kein solches n

2.5 Die Zahl N

Lemma - Für $n \geq 1$ sei $N = \binom{2n}{n}$, dann gilt:

$N | \operatorname{lcm}(1, 2, 3, \ldots, 2n)$, und $N \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$

Lemma - Für $n \geq 1$ gilt:

$2n \log 2 - \log(2n + 1) \leq \psi(2n)$

2.6 Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten

Satz:

Es gilt $\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \ln 2 \geq 0.6931$

2.7 Das Verhalten der Funktion $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ im Intervall $[p_n, p_{n+1})$

Lemma - Für $n \geq 2$:

ist $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ im Intervall $[p_n, p_{n+1})$ s.m.f. und

$\inf_{x\in[p_n,p_{n+1})} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{n\log p_{n+1}}{p_{n+1}}, \qquad \sup_{x\in[p_n,p_{n+1})} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{n\log p_n}{p_n}$

Satz - Abschätzung $\pi(x)$:

$0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}$

2.8 Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n

Satz - n-te Primzahl p_n - Für p_n gilt:

für $n \geq 2$

$0.666n\log n \leq p_n \leq 2.165n\log n$

2.9 Die Zahl $N = \binom{2n}{n}$ und das Betrandsche Postulat

Angenommene Aussagen unter der Voraussetzung eines stetigen Primzahl-Vorkommens zwischen $n, 2n$

Lemma:

Für $N = \binom{2n}{n} = \prod_p p^{\alpha_p}$ mit $\alpha_p = v_p(N)$ gilt

- $\log N \geq (\log 4)n - \log(2n+1)$
- $\alpha_p = \sum_k \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$
- $\alpha_p \leq \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor$ und damit $\alpha_p \log p \leq \log 2n$
- Ist $\alpha_p \geq 2$, so ist $p \leq \sqrt{2n}$
- $\alpha_p = \begin{cases} 1, & p \in (n, 2n] \\ 0, & p \in \left(\frac{2}{3}n, n\right], n \geq 3 \end{cases}$

Betrandsches Postulat:

Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ $\exists p \in (n, 2n]$

Satz:

Sei p_k die Folge der Primzahlen, so gilt
$\forall r.\ p_{r+1} < 2p_r$ d.h. $p_{r+1} - p_r < p_r$

2.10 Ungleichungen für $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

Satz - Für $x \geq 0$ gilt:

$\psi(x) \in [\vartheta(x), \vartheta(x) + 3\sqrt{x}]$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$$

Satz - Für $m \in [0, n]$ gilt:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-1)}{m!} \qquad \text{und}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

3 Weitere Summenfunktionen

3.1 Partielle Summation

Partielle Integration für stetig differenzierbare Funktionen $a(x), b(x)$ für $x \geq 1$:

$$\int_1^x a(t)b(t)dt = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt$$

Partielle Summation:

a_n sei eine Folge komplexer Zahlen und für alle $x \in \mathbb{R} : A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$

- Falls $b(x)$ für $x \geq 1$ stetig diff'bar, so gilt für alle $x \geq 1 \in \mathbb{R}$:
  $$\sum_{n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt$$
- Falls $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n < n_0.\ a_n = 0$ und $b(x)$ für $x \geq n_0$ stetig diff'bare Funktion, so gilt für alle $x \geq 1 \in \mathbb{R}$:
  $$\sum_{n=n_0}^{x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_{n_0}^x A(t)b'(t)dt$$

Beispiele:

1. $a_p := 1, a_n := 0, b(x) := \log(x)$, sei nun n keine Primzahl, dann ist $A(x) = \pi(x)$ und
   $$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt =$$
   $$= \pi(x)\log x - \int_1^x \pi(t) \cdot \tfrac{1}{t} dt = \pi(x)\log x - \int_1^x \tfrac{\pi(t)}{t} dt$$
2. $a_p := \log p, a_n := 0, b(x) := \frac{1}{\log x}$, sei nun n keine Primzahl, dann ist $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{p \leq x} \log p = \vartheta(x)$, dann können wir die partielle Summation mit $n_0 = 2$ anwenden und
   $$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n=2}^{x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_2^x A(t)b'(t)dt =$$
   $$= \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \int_2^x \vartheta(t) \cdot \frac{-1}{t(\log t)^2} dt = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt$$

3.2 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$

Lemma - Für $u \geq 1$ existiert:

$$\int_u^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \in \left[0, \frac{1}{u}\right]$$

Eulersche Konstante γ:

$$\gamma = 1 - \int\limits_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2} dt = 0.5772156649015328606065\dots$$

Satz:

1. Für $x \geq 1$ ist
   $\left| \sum\limits_{n\leq x} \frac{1}{n} - \log x - \gamma \right| \leq \frac{1}{x}$
   Sei nun $a(x)$ für $x \geq 1$ definiert durch
   $\sum\limits_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x}$, so gilt $\forall x \geq 1.\ |a(x)| \leq 1$
2. Die Folge $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right)_{N\geq 1}$ konvergiert gegen γ

Beweis, Anwendung der partiellen Summation:

1. $a_n := 1, b(t) := \frac{1}{t}$, wir erhalten
   $A(x) = \sum\limits_{n\leq x} 1 = \lfloor x \rfloor$
   $\sum\limits_{n\leq x} \frac{1}{x} = \sum\limits_{n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int\limits_1^x A(t)b'(t)dt = \lfloor x\rfloor \cdot \frac{1}{x} - \int\limits_1^x \lfloor t\rfloor \cdot \frac{-1}{t^2} dt =$
   $= \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int\limits_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2} dt$

3.3 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum\limits_{n\leq x} \log n$

Für $x \geq 1$: $\sum\limits_{n\leq x} \log n = \log \prod\limits_{n\leq x} n = \log \lfloor x \rfloor !$

Satz - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n\leq x} \log n - (x \log x - x + 1) \right| \leq \log x$$

sei nun $b(x)$ definiert durch

$\sum\limits_{n\leq x} \log n = x\log x - x + 1 + b(x) \cdot \log x$, so gilt $\forall x \geq 1.\ |b(x)| \leq 1$

$$\sum_{n\leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$$

Lemma - Für $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{n} \right\rfloor$$

Lemma - Für $x \geq 0$ gilt:

$$\sum_{n\leq x} \log n = \sum_{n\geq 1} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

3.4 Die Von-Mangold-Funktion $\Lambda(n)$ und $x \mapsto \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$

Erinnerung: Definition der ψ-Funktion

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$$

Von-Mangoldt-Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Lemma - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n)$$

Satz -Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right| \leq 1.2 \Rightarrow \left| \sum_{p^k \leq x} \frac{\log p}{p^k} - \log x \right| \leq 1.2$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$$

Satz - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt$$

Lemma - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt - \log x \right| \leq 2.7, \text{ also auch}$$

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \log x + O(1)$$

3.5 Die Primzahlsummenfunktion $x \mapsto \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$

Lemma:

$$0 < \sum_{p} \sum_{k \geq 2} \frac{\log p}{p^k} = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} < 0.8$$

Satz (Mertens) - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x \right| \leq 2$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

Satz:

$\exists c$ (Konstante),

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2} \log^2 x + c \right| \leq \frac{\log x}{x}, x \geq e$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x - c + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

und $c \approx 0.0728$

3.6 Die Primzahlsummenfunktion $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$

Satz (Mertens) - $\forall x \geq 2.\ \exists c_i \in \mathbb{R}.$:

$$\left| \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x - c_1 \right| \leq \frac{4}{\log x}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

3.7 Die Produkfunktion $x \mapsto \prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p \leq x} \frac{p}{p-1}$$

Lemma - Für $x \geq 1$ gilt:

$$0 < \sum_{p > x} \left(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \right) < \frac{1}{x}$$

Die folgende Reihe konvergiert zwischen 0.31 und 0.32:

$$\sum_{p} \left(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \right)$$

Implikation aus Satz (Mertens):

$$c_1 := \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right), \qquad c_2 := \sum_{p} \left(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \right)$$

$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \sim e^{c_1+c_2} \log x$ und

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-c_1-c_2}}{\log x}$$

Satz - Für $x \geq 2$ gilt:

$$\left| \prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - e^{\gamma} \log x \right| \leq 16366$$

und insbesondere gilt $c_1 + c_2 = \gamma$

3.8 Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ und das Dirichletsche Teilerproblem

Satz - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + \gamma x + r(x), \qquad r(x) \in [-x-1, 1]$$

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + O(x)$$

Satz (Dirichlet) - Für $x \geq 1$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + (2\gamma - 1)x + r(x)\sqrt{x}, \qquad |r(x)| \leq 5$$

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

3.9 Eine zum Primzahlsatz äquivalente Aussage

Satz - geltende Implikation:

$$\psi(x) \sim x \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) = -\gamma$$

3.10 Der Satz von Axer

totale Variation, beschränkte Variation:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion.

totale Variation von f auf $[a, b]$:

$$V(f, a, b) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

beschränkte Variation von f auf $[a, b]$:

das selbe, wie totale Variation, allerdings gilt hier $V(f, a, b) < \infty$

Lemma:

Sind $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ m.s., so ist die Differenz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) - h(x)$ von beschränkter Variation.
Die Umkehrung gilt ebenso.

Beispiel:

$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei beide Teilfunktionen m.s. sind. Also auf jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation.

Satz(Axer) - Sei a_n eine Folge komplexer Zahlen mit:

$\sum\limits_{n \leq x} a_n = o(x), \qquad \sum\limits_{n \leq x} |a_n| = O(x)$

$b : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die von beschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall in $[1, \infty)$ ist. Dann gilt:

$\sum\limits_{n \leq x} a_n b\left(\frac{x}{n}\right) = o(x)$

Satz(Axer) - Ist a_n eine Folge komplexer Zahlen mit:

$\sum\limits_{n \leq x} = o(x), \qquad \sum\limits_{n \leq x} |a_n| \leq O(x)$, so gilt:

$\sum\limits_{n \leq x} a_n \left(\frac{x}{n} - \lfloor \frac{x}{n} \rfloor\right) = o(x)$

3.11 Die Anzahl $\omega(n)$ der verschiedenen Primteiler von n

$\omega(n)$:

$\omega(n) = \# \{p : p | n\} = \sum\limits_{p|n} 1$

Sei nun $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so ist $\omega(n) = r$

Satz - Für $n \geq 3$ gilt:

$\omega(n) \leq 5 \cdot \frac{\log n}{\log \log n}$

Satz - Für $x \geq 2$ gilt:

$c_1 := \lim\limits_{x \to \infty} \left(\sum\limits_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right) \approx 0.2615$

$\frac{1}{x} \sum\limits_{n \leq x} \omega(n) = \log \log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$

4 Dirichlet-Reihen

4.1 Einführung

Dirichlet-Reihen:

Hat die Gestalt $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ oder $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$

Wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen oder $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion ist.

$s \in \mathbb{C}, \qquad s = \sigma + it, \qquad \sigma = \Re(s), t = \Im(s)$

Für $x \in \mathbb{R} > 0$:

$x^s = e^{s\log x} = e^{(\sigma+it)\log x} = e^{\sigma\log x} \cdot e^{it\log x} = x^\sigma(\cos(t\log x) + i\sin(t\log x))$

also $|x^s| = x^\sigma$ insbesondere:

$\frac{1}{n^s} = e^{-s\log n} = e^{-(\sigma+it)\log n} = e^{-\sigma\log n} \cdot e^{-it\log n} = \frac{\cos(t\log n)-i\sin(t\log n)}{n^\sigma}$

und

$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{n^{\Re(s)}}$

4.2 Konvergenz von Dirichlet-Reihen

Lemma (Wiederholung) - Für $N \in \mathbb{N}, \sigma > 1$ gilt:

$\sum\limits_{n\geq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{N^\sigma}\left(1 + \frac{N}{\sigma-1}\right)$

Satz - Ist $\alpha \in \mathbb{R}, a_n = O(n^\alpha)$:

so konvergiert die Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$, $\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1 + \alpha$ absolut

Beispiele:

1. $a_n = 1, \alpha = 0$ erfüllt das Lemma, also konvergiert die Reihe a_n für alle $s, \Re(s) > 1$ absolut. Wird auch als Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet $\zeta(s) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$
2. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ konvergiert absolut für $\Re(s) > 1$
3. $a_n = \frac{1}{n^n} = n^{-n}$, $a_n = O(n^\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, entsprechend konvergiert $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^{-n}}{n^s}$ absolut für $s \in \mathbb{C}$
4. bei festem $s \in \mathbb{C}$ ist $\left|\frac{n^n}{n^s}\right| = n^{n-\sigma}$. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{n^s}$ konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$, da $\frac{n^n}{n^s}$ keine Nullfolge

Satz - Sei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe:

dann gibt es ein $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert absolut}, & \Re(s) > \sigma_a \\ \text{konvergiert nicht}, & \Re(s) < \sigma_a \end{cases}$$

, wobei σ_a die Abszisse der absoluten Konvergenz heißt.

Lemma - Konvergiert die Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ für $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ so gilt:

für die Abszisse der absoluten Konvergenz $\sigma_a \leq 1 + \sigma_0$

Lemma:

Zur Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ $\quad \exists s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{R}, n_C \in \mathbb{N}$. mit

$$\forall x \geq n_C. \left| \sum_{n_C \leq n \leq x} \frac{a_n}{n^{s_0}} \right| \leq C$$

dann gilt für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_C \leq n_1 < n_2, \forall s = \sigma + it, \sigma > \sigma_0$

$$\left| \sum_{n_1 < n \leq n_2} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \frac{C}{n_1^{\sigma - \sigma_0}} \left(+ \frac{s - s_0}{\sigma - \sigma_0} \right)$$

Satz:

Hat die Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ beschränkte Partialsummen $\sum\limits_{n\leq x} \frac{a_n}{n^{s_0}}$, so konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$ Also insbesondere dann, wenn sie für $s = s_0$ konvergiert.

Satz:

Konvergiert die Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ und ist $M \in \mathbb{R} > 0$, so konvergiert die Reihe gleichmäßig auf der keilförmigen Menge $K_M = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| \leq M(\sigma - \sigma_0)\}$ und $\lim\limits_{\substack{s\to s_0\\ s\in K_M}} \sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{s_0}}$

4.3 Die einer Dirichlet-Reihe zugeordnete Funktion

Sei $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe mit Konvergenzabszisse σ_k, dann erhält man durch $f(s) = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}, \Re(s) > \sigma_k$ eine Funktion $f : \{\sigma > \sigma_k\} \to \mathbb{C}$.

Da weiterhin die Reihe in jedem kompakten Teil der offenen Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_k$ gleichmäßig gegen $f(s)$ konvergiert, ist $f(s)$ holomorph (komplex-differenzierbar, analytisch), weshalb in $\sigma > \sigma_k$ gliedweise differenziert werden darf. Man erhält

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n\geq 2}\frac{(-\log n)^k a_n}{n^s}, k \geq 0$$

Die Ableitung $f'(s)$ ist ebenfalls eine Dirichlet-Reihe, die in der Halbebene konvergiert.

Einschub - holomorph (Wikipedia):

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Ebene und $z_0 \in U$ ein Punkt dieser Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt komplex diff'bar im Punkt z_0, falls der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}, h \in \mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall bezeichnet man diesen Grenzwert als $f'(z_0)$

<u>Lemma - Sei $N \in \mathbb{N}$:</u>
und $\sum\limits_{n \geq N} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe, die für $\sigma > \sigma_a$ absolut konvergiert und dort eine Funktion $f(s)$ darstellt.

1. $\forall \varepsilon > 0. \exists C_\varepsilon. \forall s, \sigma \Re(s) \geq \sigma_a + \varepsilon$, gilt
   $|N^s f(s) - a_N| \leq C_\varepsilon \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^\sigma$
2. Ist $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{k \to \infty} \Re(s_k) = \infty$, dann gilt
   $\lim\limits_{k \to \infty} N^{s_k} f(s_k) = a_N$ $\qquad f(s_k)$ ist für hinreichend großes k definiert

<u>Satz:</u>

1. In der Konvergenzhalbebene der Dirichlet-Reihe $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ werde $f(s) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ definiert. Ist dann s_k eine Folge komplexer Zahlen mit $f(s_k) = 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \Re(s_k) = \infty$, so gilt
   $\forall n \in \mathbb{N}. a_n = 0$
2. (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen) Sind $f(s) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}, g(s) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ zwei durch Dirichlet-Reihen dargestellte Funktionen, ist s_k eine Folge komplexer Zahlen mit $f(s_k = g(s_k)$, $\lim\limits_{k \to \infty} \Re(s_k) = \infty$, so gilt
   $\forall n \in \mathbb{N}. a_n = b_n$
3. Folgerung, wenn $f(s) \not\equiv 0$, dann gibt es eine Halbebene $\sigma > a$, in der $f(s)$ keine NS hat.

<u>Lemma - Sei $m \in \mathbb{N} \geq 2$:</u>
und $f(s) = 1 - \frac{m}{m^s} = 1 - e^{(1-s)\log m}$.
Dann hat die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(s)$ Nullstellen genau in den Punkten:
$s_k = 1 + k \cdot \frac{2\pi i}{\log m}, k \in \mathbb{Z}$

<u>Satz (Landau) - Sei $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}, a_n \in \mathbb{R} \geq 0$:</u>
und Konvergenzabszisse $\sigma_k \in \mathbb{R}, f(s)$ die durch die Dirichlet-Reihe dargestellte Funktion.
Dann kann $f(s)$ nicht zu einer in $s = \sigma_k$ holomorphen Funktion fortgesetzt werden.

4.4 Multiplikation von Dirichlet-Reihen

Umformung konvergierender Dirichlet-Reihen - Faltung arithmetischer Funktionen:

Sind $f(s) = \sum\limits_{m\geq 1} \frac{a_m}{m^s}, g(s) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ Dirichlet-Reihen, die irgendwo konvergieren, so gibt es eine Halbebene, wo beide absolut konvergieren. Dort lassen sich die Reihen beliebig ausmultiplizieren und umsortieren. Man erhält also eine weitere Dirichlet-Reihe, die absolut konvergiert.

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s} = \sum\limits_{k\geq 1} \frac{a_k}{k^s} \cdot \sum\limits_{l\geq 1} \frac{b_l}{l^s} = \sum\limits_{k\geq 1, l\geq 1} \frac{a_k b_l}{(kl)^s} = \sum\limits_{n\geq 1, k\geq 1} \sum\limits_{l\geq 1, kl=n} \frac{a_k b_k}{(kl)^s} =$
$= \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sum\limits_{kl=n} a_k b_l}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sum\limits_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}}{n^s}$

Seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (arithmetische Funktionen), dann gilt

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{b(n)}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{c(n)}{n^s}, c(n) = \sum\limits_{kl=n} a(k)b(l) = \sum\limits_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum\limits_{d|n} a\left(\frac{n}{d}\right) b(d)$

Diese Zuordnung $(a, b) \mapsto c$ wird auch als Faltung arithmetischer Funktionen bezeichnet, wobei $c = a * b$

Die Konvergenzhalbebene kann sich beim Multiplizieren von Dirichlet-Reihen vergrößern

Tabelle 1: Wertetabelle der Moebius-Funktion

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Beispiele:

1. Für $\Re(s) > 1$ gilt
   $\zeta(s)^2 = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sum\limits_{d|n} 1\cdot 1}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sum\limits_{d|n} 1}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s}$,
   wobei $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnet

2. Ist $a(p) = 1, a(n) = 0$, falls n keine Primzahl ist und $\forall n.b(n) = 1$, so gilt
   $\sum\limits_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum\limits_{d|n} a(d) = \sum\limits_{p|n} a(p) = \sum\limits_{p|n} 1 = \omega(n)$
   Für $\Re(s) > 1$ folgt
   $\zeta(s) \cdot \sum\limits_{p} \frac{1}{p^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\omega(n)}{n^s}$

3. $\Re(s) > 2$ gilt
   $\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{s-1}} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{n^s} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sum\limits_{d|n} d}{n^s}$,
   wobei $\sum\limits_{d|n} d$ die Summe aller positiven Teiler von n, inklusive $1, n$ und wird häufig mit $\sigma(n)$ bezeichnet

Die Möbius-Funktion $\mu(n)$:

$$\mu(p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}) = \begin{cases} (-1)^{e_1+\dots+e_r}, & e_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, r \\ 0, & e_i \geq 2 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Sind also $p_1, \dots, p_r$ verschiedene Primzahlen, so ist $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$, und ist n nicht quadratfrei, so ist $\mu(n) = 0$, Siehe auch table 1. Für Teilerfremde Zahlen m, n gilt $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$

Satz:

$\sum\limits_{d|n} \mu(d) = 0, n > 1$

Satz:

Die Dirichlet-Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$ konvergiert absolut für $\Re(s) > 1$ und es gilt
$\zeta(s) \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$
d.h. für $\Re(s) > 1$. $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$
und beide Funktionen haben keine NS in der Halbebene $\Re(s) > 1$

Satz (Möbiussche Umkehrformeln):

Sind $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ arithmetische Funktionen, so folgt

$$\forall n \in \mathbb{N} b(n) = \sum_{d|n} a(n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}.\ a(n) = \sum_{d|n} \mu(d) b\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\tfrac{n}{d}\right) b(n) = \sum_{kl=n} \mu(k) b(l)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{b(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{b(n)}{n^s}$$

Lemma - Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$

Satz - Für $\Re(s) > 1$ gilt:

$\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ und
$\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$

4.5 Anwendung auf die Zeta-Funktion

Lemma:

Für $m \geq 2$ werde eine Dirichlet-Reihe $z_m(s)$ definiert
$z_m(s) := 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^s} - \frac{m-1}{m^s} + \frac{1}{(m+1)^s} \cdots + =$
$= \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}, a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 2, \ldots, m-1 \mod m \\ -(m-1), & n \equiv 0 \mod m \end{cases}$
Die Konvergenzabszisse ist $\sigma_k = 0$, die Abszisse der absoluten Konvergenz ist $\sigma_a = 1$
Es gilt für $\Re(s) > 1$

$$z_m(s) = (1 - \frac{m}{m^s}) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Lemma:

Sei wieder für $m \geq 2 : z_m(s)$ wie oben definiert, dann wird

1. $\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{m}{m^s}} \cdot z_m(s)$
   eine meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf $\Re(s) > 0$ definiert
2. $\zeta(s) = \left(1 - \frac{m}{m^s}\right)^{-1} z_m(s)$ hat in $\Re(s) > 0$ höchstens Polstellen in den Punkten der Menge $\left\{1 + k \cdot \frac{2\pi i}{\log m} : k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\zeta(s)$ ist analytisch in $\{\Re(s) > 0\} \setminus \{0\}$

Lemma - Die (in $\mathbb{C}$ meromorphe) Funktion:

$\frac{1}{1-\frac{2}{2^s}}$
hat einen Pol 1. Ordnung in $s = 1$ mit Laurentreihenentwicklung
$\frac{1}{1-\frac{2}{2^s}} = \frac{1}{\log 2} \cdot (s-1)^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{12} \cdot (s-1) - \frac{(\log 2)^3}{720}(s-1)^3 + \dots$

Satz:

$\zeta(s)$ lässt sich meromorph auf die Halbebene $\Re(s) > 0$ fortsetzen, z.B. durch $\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{2}{2^s}} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ oder $\zeta(s) = \frac{z_m(s)}{1-\frac{m}{m^s}}, m \geq 2$
$\zeta(s)$ ist in $\{\Re(s) > 1\} \setminus \{1\}$ analytisch und hat im Punkt $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung mit Laurentreihenentwicklung $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \dots$
Insbesondere hat das Residuum von $\zeta(s)$ im Punkt $s = 1$ den Wert 1

4.6 Integraldarstellung

Lemma - Erinnerung:

Ist $0 < a < b, f : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränkt udn Riemann-integrierbar, so ist
$F(s) = \int\limits_a^b \frac{f(x)}{x^s} dx$
$\forall s \in \mathbb{C}$ komplex-diff'bar und die Ableitung ist
$F'(s) = \int\limits_a^b \frac{f(x)(-\log x)}{x^s} dx$

Satz:

Ist $f : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $\exists \alpha \in \mathbb{R}.\ f(x) = O(x^\alpha)$, so ist
$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \alpha F(s) = \int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}} dx$ definiert und holomorph

Beispiel - Sei $\alpha \in \mathbb{R}, f(x) = x^{\alpha}$:

dann folgt für $c \geq 1, s \neq \alpha$:

$$\int_1^c \frac{x^{\alpha}}{x^{s+1}} dx = \int_1^c x^{\alpha-s-1} dx = \left[\frac{x^{\alpha-s}}{\alpha-s}\right]_{x=1}^c = \frac{1}{s-\alpha}\left(1 - \frac{1}{c^{s-\alpha}}\right)$$

Anhand von $\left|\frac{1}{c^{s-\alpha}}\right| = \frac{1}{c^{\Re(s)-\alpha}}$ sieht man, dass die Folge für $c \to \infty$ nur dann konvergiert, wenn $\Re(s) > \alpha$.

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-\alpha}, \Re(s) > \alpha$$

Satz - Integraldarstellung einer Dirichlet-Reihe:

Sei $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ eine D.R. mit Konvergenzabszisse $\sigma - k$ und $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$, dann gilt

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \sigma_k : \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx$$

Die rechte Seite ist in der Halbebene $\Re(s) > \sigma_k$ holomorph

Satz - Für $\Re(s) > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx$$

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = s \int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^{s+1}} dx$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx, M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx$$