Musterlösungen zum Aufgabenpool von Norbert Lindlein zur Experimentalphysik für Naturwissenschaftler Teil 1 (behandelte Gebiete der Physik: Mechanik und Wärmelehre)

Anmerkungen zu den Aufgaben:
Es sind alle Aufgaben enthalten, die ich im Lauf der Semester WS 2014/15, SS 2015 (Nachklausur), WS 2015/16, SS 2016 (Nachklausur), WS 2017/18, SS 2018 (Nachklausur), WS 2018/19 und SS 2019 (Nachklausur) bisher für elektronische Klausuren im Bereich Mechanik und Wärmelehre entwickelt habe. Einige der Aufgaben ähneln sich (bei einem Aufgabenpaar sind die physikalische Fragestellung und selbst die Zahlenwerte identisch und nur das zugehörige „Alltagsphänomen" ist unterschiedlich: Stein fällt von Turm bzw. Ball fällt von Kran), die meisten sind aber doch deutlich verschieden.

Bei einigen „Multiple Choice" Aufgaben der „älteren Generation" gibt es Fragen, die sich gegenseitig ausschließen, bei den neueren Aufgaben sind die Fragen unabhängig voneinander. Fragen, die sich gegenseitig ausschließen, ermöglichen zwar, dass man alleine durch logisches Denken eine Frage beantwortet, setzen aber natürlich voraus, dass man zumindest eine der Fragen richtig beantwortet hat, da sonst auch die logische Schlussfolgerung eine weitere falsche Antwort liefert. Von daher ist diese Art der gegenseitig abhängigen Fragen nicht sonderlich sinnvoll.

Da es insgesamt 60 Aufgaben sind und jede der bisher 8 Klausuren (je 4x „Klausur" und „Nachklausur") 20 Aufgaben enthielt, sind die meisten Aufgaben natürlich schon mehrmals genommen worden. Einen Überblick darüber, wann welche Aufgabe bisher genommen wurde, gibt die folgende Übersicht auf den nächsten beiden Seiten. Bei einigen Aufgaben ist ersichtlich, dass sie bisher nicht oft genommen wurden, obwohl sie schon relativ alt sind. Dies liegt dann daran, dass die Aufgabe entweder relativ schwer ist oder eine der oben erwähnten Multiple Choice Aufgaben ist, bei denen noch sich gegenseitig ausschließende Fragen gestellt wurden. Bei den Aufgaben aus der Wärmelehre ist auch zu beachten, dass ich diese erst ab dem WS 2017/18 im Teil 1 der Vorlesung behandelt habe, während ich vorher die Wärmelehre erst im Sommersemester schaffte.

Überblick der Aufgaben (alphabetisch) und bisherige Verwendung:

Autocrash mit Sicherheitsfedern (WS 2014/15, SS 2016, WS 2018/19)

Bahnen von Himmelskörpern (WS 2014/15, SS 2019)

Ballweitwurf (SS 2015, SS 2016, WS 2018/19)

Berechnung der Masse eines Gasvolumens (WS 2015/16, SS 2018, SS 2019)

Bergab bei Reibung (WS 2015/16, WS 2017/18, WS 2018/19)

Bogenschuss auf drehbares Target (WS 2015/16, SS 2018)

Bremswirkung zweier Scheiben (SS 2015, SS 2016, WS 2018/19)

Einfache Kenngrößen von Wellen (WS 2014/15, WS 2015/16, SS 2016, WS 2017/18, SS 2018)

Erhaltungssätze der Mechanik (SS 2015, WS 2015/16, SS 2016, SS 2018, SS 2019)

Federpendel (WS 2014/15, WS 2015/16, SS 2016, WS 2017/18, WS 2018/19)

Flugbahn eines Golfballs (WS 2015/16, SS 2019)

Fragen zu Federpendel (SS 2016, SS 2018)

Freier Fall (WS 2014/15, SS 2016, WS 2018/19)

Freier Fall eines Balls (WS 2015/16, WS 2017/18, SS 2019)

Gedämpftes und ungedämpftes Federpendel (SS 2015, SS 2019)

Geschwindigkeit eines Hohlzylinders (WS 2015/16, SS 2018)

Geschwindigkeit versus Reichweite eines Elektroautos (SS 2015, SS 2016, WS 2017/18, WS 2018/19)

Gravitationskraft auf Himmelskörpern (WS 2014/15, SS 2016, WS 2017/18, SS 2019)

Grundbegriffe der Interferenz zweier Wellen (SS 2015, SS 2016, WS 2018/19)

Grundgesetze der Drehung starrer Körper (SS 2015, WS 2015/16, WS 2017/18, SS 2019)

Grundgesetze der Mechanik (WS 2014/15, WS 2015/16, WS 2017/18, WS 2018/19)

Heimtrainer als Wasserpumpe (SS 2015, SS 2016, SS 2018)

Hohlzylinder macht Looping (WS 2014/15)

Ideales Gas (SS 2015, SS 2016, WS 2016/17, WS 2017/18, WS 2018/19)

Interferenz von Wasserwellen (WS 2014/15, SS 2019)

Interferenz zweier Wasserwellen (WS 2015/16, SS 2018)

Kalten Kaffee mit heißem Wasser erwärmen (WS 2015/16, SS 2016, WS 2017/18, WS 2018/19)

Kavalierstart am Berg (SS 2015, SS 2016, SS 2018)

Kraft- und Energiebetrachtung bei einer Pirouette (WS 2014/15)

Kugel in Führungsschiene (WS 2014/15, WS 2015/16, SS 2018, SS 2019)

Leistung einer Windkraftanlage (SS 2015, WS 2015/16, WS 2018/19)

Maximaler Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine (WS 2015/16, WS 2017/18, SS 2019)

Nasses Holz verbrennen (WS 2015/16, SS 2016, SS 2018)

Parameter einer ebenen Welle (SS 2015, WS 2018/19)

Phasenübergänge (SS 2015, WS 2015/16, SS 2016, WS 2016/17, SS 2018)

Pirouette im All (WS 2014/15, SS 2016, WS 2017/18, SS 2019)

Pumpspeicher (WS 2014/15, WS 2015/16, WS 2017/18, WS 2018/19)

Raketenabschuss (SS 2015, SS 2016, WS 2018/19)

Rettung im All (SS 2015, WS 2015/16, WS 2017/18, WS 2018/19)

Rollender Zylinder auf schiefer Ebene (SS 2015, SS 2016, WS 2018/19)

Rotierende Kugeln auf Stange (WS 2014/15, WS 2017/18)

Schlittenfahrt (WS 2014/15, SS 2016, SS 2018, SS 2019)

Schuß mit Kugel auf fernem Planeten (WS 2014/15, SS 2016, WS 2017/18)

Schwerebeschleunigung auf Himmelskörpern (WS 2015/16, WS 2018/19)

Schwerebeschleunigung auf Jupitermond (SS 2015)

Schwerkraft bei kugelförmigen Himmelskörpern verschiedener Dichte (SS 2015, SS2018)

Schwingung an Kran (WS 2014/15, SS 2019)

Schwingungsdauer eines ungedämpften Federpendels (SS 2015)

Sprung von Turm (WS 2014/15, SS 2018)

Stoß auf der Sommerrodelbahn (SS 2015, SS 2018, SS 2019)

Tauchgang in U-Boot (WS 2014/15, WS 2015/16, WS 2017/18, WS 2018/19)

Trägheitsmomente verschiedener Körper (SS 2015, WS 2015/16, SS 2016, SS 2018)

Wasserdruck (SS 2015, SS 2016, SS 2018, SS 2019)

Wege im pV-Diagramm (SS 2015, WS 2015/16, SS 2016, WS 2016/17, WS 2017/18, SS 2019)

Wellentypen (WS 2014/15, WS 2015/16, WS 2017/18, SS 2019)

Wärmedämmung (SS 2015, SS 2016, WS 2016/17, SS 2018, SS 2019)

Wärmekapazität von Gasen (SS 2015, WS 2015/16, WS 2016/17, WS 2017/18, WS 2018/19)

Wärmekapazität von Wasser (SS 2015, WS 2016/17, SS 2018, SS 2019)

Wärmeverluste beim Heizen eines Hauses (WS 2015/16)

Zentraler Stoß zweier Atomkerne (WS 2015/16)

Autocrash mit Sicherheitsfedern

Autocrash:
Eindimensionaler elastischer Stoß mit ruhendem zweiten Teilchen.
Energie- und Impulserhaltung
Impulserhaltung:

$$p = m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1' = \frac{m_2 v_2' - m_1 v_1}{m_1}$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

Einsetzen, Kürzen des Faktors ½ und Multiplikation der Gleichung mit m_1 ergibt:

$$m_1^2 v_1^2 = (m_2 v_2' - m_1 v_1)^2 + m_1 m_2 (v_2')^2$$

$$\Rightarrow m_2 (m_1 + m_2)(v_2')^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2' = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) v_2' = 2 m_1 v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Die zweite Lösung der Gleichung, also $v_2'=0$, ist ausgeschlossen, da dies bedeuten würde, dass das Teilchen 1 durch das Teilchen 2 „hindurch laufen“ muss.

Version 1: m_1=1000 kg, m_2=1200 kg, v_1=36 km/h=10 m/s ➔ v_2'=9.09 m/s
Version 2: m_1=5000 kg, m_2=1000 kg, v_1=36 km/h=10 m/s ➔ v_2'=16.7 m/s
Version 3: m_1=1000 kg, m_2=5000 kg, v_1=54 km/h=15 m/s ➔ v_2'=5.0 m/s
Version 4: m_1=10000 kg, m_2=1200 kg, v_1=18 km/h=5 m/s ➔ v_2'=8.93 m/s
Version 5: m_1=10000 kg, m_2=500 kg, v_1=36 km/h=10 m/s ➔ v_2'=19.05 m/s
Version 6: m_1=1200 kg, m_2=1000 kg, v_1=54 km/h=15 m/s ➔ v_2'=16.36 m/s

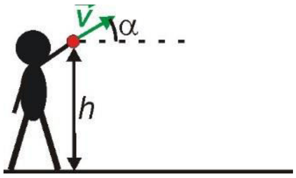
Bahnen von Himmelskörpern

Wissenfragen: deshalb hier keine Musterlösung (einfache Fragen zu Bahnformen, Drehimpulserhaltung, Energieerhaltung bei Bahnen von Himmelskörpern)

Anmerkung: Nicht alle Fragen sind unabhängig voneinander, sondern manche Fragen schließen bei Richtigkeit die Richtigkeit einer anderen Frage logisch aus (oder umgekehrt). Das hatte ich bei früheren Fragen bisweilen so gemacht (später habe ich nur unabhängige Fragen in einem Fragenpool gestellt). Prinzipiell ist eine solche Fragestellung aber auch nicht sinnlos, da sie dann eben neben dem physikalischen Wissen auch logisches Denken einbezieht.

Ballweitwurf

Sie werfen einen Ball in der Höhe h=2 m über dem Erdboden unter dem Winkel α=55° (Winkel relativ zur Horizontalen) mit dem Geschwindigkeitsbetrag v=20 m/s schräg nach oben ab. Welche horizontale Entfernung legt der Ball zurück, bevor er den Erdboden berührt. Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Der Ball wird als punktförmig angenommen und Luftreibung wird vernachlässigt. Die Schwerebeschleunigung der Erde beträgt g=9.81 m/s^2.



Lösung:
Die Bewegung wird in eine horizontale Komponente mit gleichbleibendem Geschwindigkeitsbetrag $v_{x,0}=v\cos\alpha$ und einer vertikalen Komponente mit konstanter Beschleunigung $-g$ zerlegt bei Anfangsgeschwindigkeit $v_{y,0}=v\sin\alpha$.
Es gilt also für die Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = v_{y,0} - gt$$

Und für die y-Koordinate selbst (y=0 auf dem Erdboden):

$$y = h + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Ball erreicht seinen höchsten Punkt nach der Zeit t_1, bei der v_y=0 gilt:

$$0 = v_{y,0} - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y,0}}{g} = \frac{v\sin\alpha}{g}$$

Die Höhe über dem Erdboden ist dann:

$$y(t_1) = h + v_{y,0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g}$$

Diese Höhe muss der Ball anschließend in der Zeit t_2 im freien Fall durchlaufen, bevor er den Erdboden berührt. Man kann also die Zeit t_2 einfach ausrechnen über:

$$h + \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}}$$

Die auf der Horizontalen (x-Achse) zurück gelegte Strecke, wenn der Ball den Boden gerührt, ist also:

$$x = v_{x,0}(t_1 + t_2) = v\cos\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}}\right)$$

Hier: x=39.7 m
In der Praxis wird man typischerweise die Zwischenergebnisse numerisch ausrechnen und gleich einsetzen, da dies schneller geht.

Varianten:
b) h=1.5 m, v=25 m/s, α=45° → x=65.2 m
c) h=2 m, v=21 m/s, α=35° → x=44.9 m
d) h=2 m, v=22 m/s, α=45° → x=51.3 m
e) h=1.5 m, v=19 m/s, α=55° → x=35.6 m
f) h=2 m, v=23 m/s, α=40° → x=55.4 m

Berechnung der Masse eines Gasvolumens

In einem thermisch isolierten Druckbehälter ist reiner Sauerstoff O_2 (zweiatomiges Molekül) mit einem Volumen von V=5 l eingeschlossen. Eine Messung des Drucks p und der Temperatur T ergibt die Werte p=20 bar und T=20° C. Wie groß ist die Masse des in dem Behälter enthaltenen Sauerstoff-Gases? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert. Anmerkung: Die allgemeine Gaskonstante beträgt R=8.3144 J K^{-1} mol^{-1}, ein Sauerstoff-Atom hat 16 atomare Masseneinheiten und der absolute Nullpunkt der Temperatur liegt bei -273.15° C. Außerdem wird das Sauerstoff-Gas hier als ideales Gas angenommen.

Lösung:
Die Gleichung eines idealen Gases lautet:

$$pV = nRT$$

Außerdem gilt für die Masse m des zweiatomigen Sauerstoff-Gases mit der Molmasse m_{mol}=32 g/mol (pro Molekül 2 Atome mit je 16 amu) bei der Stoffmenge n:

$$m = m_{mol} n = m_{mol} \frac{pV}{RT} = 131 \text{ g}$$

Variationen:
b) V=6 l, p=15 bar, T=20° C ➔ m=118 g
c) V=4 l, p=21 bar, T=20° C ➔ m=110 g
d) V=5 l, p=14 bar, T=0° C ➔ m=99 g
e) V=4 l, p=25 bar, T=0° C ➔ m=141 g
f) V=6 l, p=18 bar, T=0° C ➔ m=152 g

Bergab bei Reibung

Sie fahren vom Ruhezustand ausgehend mit einem Schlitten einen Hügel mit dem Neigungswinkel α=20° (Winkel zwischen der Horizontalen und der Schlittenpiste) herunter. Der Schwerpunkt legt dabei eine Höhendifferenz von h=20 m zurück. Der Schlitten gleitet auf der Schlittenpiste, wobei der Gleitreibungskoeffizient als geschwindigkeitsunabhängig mit dem Wert μ=0.03 angenommen wird. Welche Endgeschwindigkeit v erreichen Sie unmittelbar am Ende der Piste? Kreuzen Sie den nächstgelegenen Wert an. Schwerebeschleunigung der Erde g=9.81 m/s^2.

Lösung:

Der Schlitten erfährt die Hangabtriebskraft F_A (=Komponente der Gewichtskraft parallel zur Schlittenpiste) vermindert um die Gleitreibungskraft F_R, wobei letztere wiederum das Produkt aus dem Gleitreibungskoeffizienten und der Normalkraft F_N ist. Die insgesamt wirkende Kraft F ist also:

$$F_A = mg\sin\alpha$$

$$F_N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_R = \mu F_N = \mu mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow F = F_A - F_R = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Die Kraft ist also konstant, so dass die Arbeit W, die während des „Bergab Fahrens" verrichtet wird, gleich Kraft F mal zurückgelegte Wegstrecke s ist. Hierfür gilt:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} \Rightarrow W = Fs = mgh\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha} = mgh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)$$

Die kinetische Energie am Ende ist also genauso groß wie die verrichtete Arbeit, so dass für die Geschwindigkeit v am Ende gilt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = W = mgh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right) \Rightarrow v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)} = 19.0\,\text{m/s}$$

Varianten:

b) α=10°, h=20 m, μ=0.04 ➔ v=17.4 m/s
c) α=15°, h=20 m, μ=0.02 ➔ v=19.1 m/s
d) α=20°, h=15 m, μ=0.025 ➔ v=16.6 m/s
e) α=10°, h=15 m, μ=0.02 ➔ v=16.2 m/s
f) α=22°, h=15 m, μ=0.015 ➔ v=16.8 m/s

Bogenschuss auf drehbares Target

Im Abstand r=0.5 m von einer Drehachse ist an einer (masselosen) drehbaren Stange eine Masse M=1 kg angebracht, die sich zuerst in Ruhe befindet. Dann schießen Sie mit einem Sportbogen einen Pfeil mit Masse m=48 g und Geschwindigkeitsbetrag v=200 km/h zentral von vorne (siehe Grafik) auf die Masse M, so dass der Pfeil stecken bleibt und sich das gesamte System aus beiden Massen um die Drehachse dreht. Mit welcher Frequenz ν (also Zahl der Umdrehungen/Zeit, nicht Kreisfrequenz!) dreht sich das System dann? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Bemerkung: Die beiden Massen (Target und Pfeil) dürfen als Punktmassen interpretiert werden, die den Abstand r von der Drehachse haben. Reibung wird vernachlässigt.

Lösung:
Der Gesamtdrehimpuls muss erhalten bleiben.
Unmittelbar bevor der Pfeil das Target trifft:
Drehimpuls Target L_{target}=0, Drehimpuls Pfeil bzgl. Drehachse: $L_{\text{pfeil}}=mr\mathrm{v}$

Unmittelbar nachdem der Pfeil das Target getroffen hat:
Drehimpuls Target+Pfeil $L_{\text{system}}=(M+m)r^2\omega$ (mit der Kreisfrequenz $\omega=2\pi\nu$)

$$L_{target} + L_{pfeil} = L_{system} \Rightarrow mr\mathrm{v} = (M+m)r^2 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{m\mathrm{v}}{2\pi(M+m)r} = 0.81\,\mathrm{Hz}$$

Anmerkung: Man könnte auch die Impulserhaltung nehmen, wobei der Impuls des Pfeils vor dem Treffen des Targets gleich dem Impuls der Kombination Target+Pfeil nach dem Treffen des Targets sein muss, was auf die gleiche Formel führt.

Varianten:
b) r=0.6 m, M=0.5 kg, m=40 g, v=255 km/h ➔ ν=1.39 Hz
c) r=0.4 m, M=1 kg, m=45 g, v=250 km/h ➔ ν=1.19 Hz
d) r=0.5 m, M=0.5 kg, m=50 g, v=185 km/h ➔ ν=1.49 Hz
e) r=0.5 m, M=1 kg, m=40 g, v= 295 km/h ➔ ν=1.00 Hz
f) r=0.6 m, M=0.5 kg, m=30 g, v=215 km/h ➔ ν=0.90 Hz

Bremswirkung zweier Scheiben

Sie haben zwei homogene Scheiben aus dem gleichen Material und mit gleichem Radius, aber verschiedener Dicke, die reibungsfrei um die gemeinsame Symmetrieachse rotieren können, die senkrecht auf der Scheibenebene durch den Mittelpunkt jeder Scheibe geht. Anfangs befinde sich die untere Scheibe in Ruhe, während die obere Scheibe mit der Kreisfrequenz ω rotiert. Dann fällt die obere Scheibe auf die untere Scheibe und bleibt dort kleben, so dass sich beide danach mit gleicher Kreisfrequenz ω' drehen. Wie groß muss das Verhältnis der Scheibendicken d_1/d_2 (Dicke der unteren Scheibe d_1, Dicke der oberen Scheibe d_2) beider Scheiben sein, damit die Rotationsenergie nach dem Zusammenkleben der Scheiben nur noch 10% der Rotationsenergie der Scheiben vor dem Zusammenkleben beträgt? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Lösung:
Das Verhältnis der Trägheitsmomente I_1 (untere Scheibe) und I_2 (obere Scheibe) hängen aufgrund des gleichen Materials und des gleichen Radius nur vom Verhältnis der Scheibendicken ab, also:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Beim Zusammenkleben der beiden Scheiben muss der Drehimpuls erhalten bleiben, der hier nur betragsmäßig behandelt werden muss, da die Achse die gleiche bleibt. Die Rotationsenergien vor und nach dem Zusammenkleben ändern sich:

$$I_1 \cdot 0 + I_2\omega = I_2\omega = (I_1 + I_2)\omega' \;\Rightarrow\; \frac{\omega'}{\omega} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = \frac{1}{I_1/I_2 + 1} = \frac{1}{d_1/d_2 + 1}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I_1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2 = \frac{1}{2}I_2\omega^2$$

$$E_{rot}' = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega'^2$$

Für das Verhältnis der Rotationsenergien nach und vor dem Zusammenkleben gilt also unter Benutzung des Verhältnisses der Kreisfrequenzen:

$$\frac{E_{rot}'}{E_{rot}} = \frac{I_1 + I_2}{I_2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = (d_1/d_2 + 1)\frac{1}{(d_1/d_2 + 1)^2} = \frac{1}{d_1/d_2 + 1} \;\Rightarrow\; \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{E_{rot}'/E_{rot}} - 1$$

Noch eleganter kann man die Aufgabe lösen unter Verwendung der Formel für die Rotationsenergie in Abhängigkeit des konstant bleibenden Drehimpulses L:

$$\frac{E_{rot}'}{E_{rot}} = \frac{\dfrac{L^2}{2(I_1 + I_2)}}{\dfrac{L^2}{2I_2}} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = \frac{1}{d_1/d_2 + 1}$$

Hier also: $E_{rot}'/E_{rot}=0.1 \rightarrow d_1/d_2=9$

Varianten:
b) $E_{rot}'/E_{rot}=0.2 \rightarrow d_1/d_2=4$
c) $E_{rot}'/E_{rot}=0.17 \rightarrow d_1/d_2=4.88$
d) $E_{rot}'/E_{rot}=0.25 \rightarrow d_1/d_2=3$
e) $E_{rot}'/E_{rot}=0.14 \rightarrow d_1/d_2=6.14$
f) $E_{rot}'/E_{rot}=0.11 \rightarrow d_1/d_2=8.09$

Einfache Kenngrößen von Wellen

Wissensfragen: deshalb hier keine Musterlösung (einfache Formelbeziehungen zwischen Wellenlänge, Frequenz, Kreisfrequenz, Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit als richtig oder falsch erkennen)

Erhaltungssätze der Mechanik

Kreuzen Sie alle der folgenden Aussagen an, die korrekt sind.

Fragen, die in den verschiedenen Varianten vorkommen (je 4 davon):

a) Wenn auf ein System von Teilchen keine äußere Kraft wirkt, ist die Summe der Impulse aller Teilchen konstant. (Korrekt)
b) Wenn auf ein System von Teilchen keine äußere Kraft wirkt, kann sich die Summe der Impulse aller Teilchen trotzdem ändern. (Nicht korrekt)
c) Wenn auf ein System von Teilchen eine äußere Kraft wirkt, ändert sich die Summe der Impulse der Teilchen nicht. (Nicht korrekt)
d) Wenn auf ein System von Teilchen eine äußere Kraft wirkt, ändert sich i.a. die Summe der Impulse der Teilchen. (Korrekt)
e) Wenn auf ein System von Teilchen kein äußeres Drehmoment wirkt, ist die Summe der Drehimpulse aller Teilchen konstant. (Korrekt)
f) Wenn auf ein System von Teilchen kein äußeres Drehmoment wirkt, kann sich die Summe der Drehimpulse aller Teilchen trotzdem ändern. (Nicht korrekt)
g) Wenn auf ein System von Teilchen ein äußeres Drehmoment wirkt, ändert sich die Summe der Drehimpulse der Teilchen nicht. (Nicht korrekt)
h) Wenn auf ein System von Teilchen ein äußeres Drehmoment wirkt, ändert sich i.a. die Summe der Drehimpulse der Teilchen. (Korrekt)
i) Für ein punktförmiges Masseteilchen bleibt die Summe aus potentieller und kinetischer Energie in einem konservativen Kraftfeld immer erhalten. (Korrekt)
j) Für ein punktförmiges Masseteilchen bleibt die Summe aus potentieller und kinetischer Energie immer erhalten, selbst wenn Reibung auftritt. (Nicht korrekt)
k) Beim Stoß zweier Teilchen bleibt die Summe der kinetischen Energien beider Teilchen vor und nach dem Stoß immer gleich. (Nicht korrekt)
l) Beim elastischen Stoß zweier Teilchen bleibt die Summe der kinetischen Energien beider Teilchen vor dem Stoß und nach der Wechselwirkung des Stoßes immer gleich. (Korrekt)

Federpendel

Eine Masse m=1 kg hängt an einer (masselosen) Feder mit Federkonstante D=10 N/m. Nun wird die Masse aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so dass das System zu schwingen anfängt (Dämpfung sei vernachlässigbar). Wie lange dauert es, bis eine volle Periode T der Schwingung ausgeführt wird? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Lösung:
Die Kreisfrequenz ω bzw. die Periode T der Schwingung eines Federpendels sind:

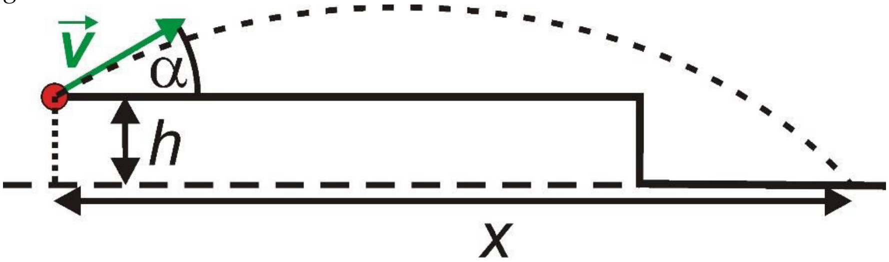
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 1.99\text{ s}$$

Varianten:
b) m=2 kg, D=9 N/m ➔ T=2.96 s
c) m=2 kg, D=13 N/m ➔ T=2.46 s
d) m=1 kg, D=40 N/m ➔ T=0.99 s
e) m=1 kg, D=17.5 N/m ➔ T=1.50 s
f) m=3 kg, D=7.5 N/m ➔ T=3.97 s

Flugbahn eines Golfballs

Sie schlagen einen Golfball am Erdboden unter dem Winkel α=55° (Winkel relativ zur Horizontalen) mit dem Geschwindigkeitsbetrag *v*=50 m/s schräg nach oben ab. Welche horizontale Entfernung *x* legt der Ball zurück, bevor er den Erdboden des Zielgeländes berührt, das um die Höhe *h*=2 m tiefer liegt als beim Abschlag. Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Anmerkung: Der Golfball wird als punktförmig angenommen und Luftreibung bzw. aerodynamische Effekte werden vernachlässigt. Die Schwerebeschleunigung der Erde beträgt g=9.81 m/s^2.



Lösung:

Die Bewegung wird in eine horizontale Komponente mit gleichbleibendem Geschwindigkeitsbetrag $v_{x,0}=v\cos\alpha$ und einer vertikalen Komponente mit konstanter Beschleunigung $-g$ zerlegt bei Anfangsgeschwindigkeit $v_{y,0}=v\sin\alpha$. Es gilt also für die Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$v_y = v_{y,0} - gt$$

Und für die y-Koordinate selbst (*y*=0 auf dem Erdboden in der Zielregion):

$$y = h + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Ball erreicht seinen höchsten Punkt nach der Zeit t_1, bei der v_y=0 gilt:

$$0 = v_{y,0} - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y,0}}{g} = \frac{v\sin\alpha}{g}$$

Die Höhe über dem Erdboden ist dann:

$$y(t_1) = h + v_{y,0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = h + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g}$$

Diese Höhe muss der Ball anschließend in der Zeit t_2 im freien Fall durchlaufen, bevor er den Erdboden berührt. Man kann also die Zeit t_2 einfach ausrechnen über:

$$h + \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}}$$

Die auf der Horizontalen (x-Achse) zurück gelegte Strecke, wenn der Ball den Boden gerührt, ist also:

$$x = v_{x,0}(t_1 + t_2) = v\cos\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}}\right)$$

Hier: *x*=240.9 m

Varianten:

b) *h*=3 m, *v*=40 m/s, α=45° ➔ *x*=166.0 m
c) *h*=2 m, *v*=35 m/s, α=35° ➔ *x*=120.1 m
d) *h*=3 m, *v*=40 m/s, α=30° ➔ *x*=146.3 m
e) *h*=2 m, *v*=50 m/s, α=30° ➔ *x*=224.1 m
f) *h*=1 m, *v*=44 m/s, α=45° ➔ *x*=198.3 m

Fragen zu Federpendel

Wissensfragen: deshalb hier keine Musterlösung (einfache Fragen zu ungedämpfter harmonischer Schwingung eines Federpendels)

Freier Fall (identisch zu „Freier Fall eines Balls“, nur dass dort ein Ball anstelle eines Steins genommen wird und Sie auf einem Kran anstatt auf einem Turm stehen)

Sie stehen auf einem Turm und lassen dort einen Stein einfach los, so dass er senkrecht nach unten fällt. Reibungskräfte seien vernachlässigbar und die Schwerebeschleunigung beträgt g=9.81 m/s^2.

Wie lange dauert es, bis der Stein den 20 m entfernten Boden berührt? Kreuzen Sie den nächstgelegenen Wert an.

Höhe $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2.02\,\mathrm{s}$

Varianten:
b) h=30 m ➔ t=2.47 s
c) h=10 m ➔ t=1.43 s
d) h=40 m ➔ t=2.86 s
e) h=6 m ➔ t=1.11 s
f) h=45 m ➔ t=3.03 s

Freier Fall eines Balls

Sie stehen auf einem Kran und lassen dort einen (punktförmigen) Ball einfach los, so dass er senkrecht nach unten fällt. Reibungskräfte seien vernachlässigbar und die Schwerebeschleunigung beträgt g=9.81 m/s^2.

Wie lange dauert es, bis der Ball den 20 m entfernten Boden berührt? Kreuzen Sie den nächstgelegenen Wert an.

Höhe $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2.02\ \mathrm{s}$

Varianten:

b) h=30 m ➔ t=2.47 s

c) h=10 m ➔ t=1.43 s

d) h=40 m ➔ t=2.86 s

e) h=6 m ➔ t=1.11 s

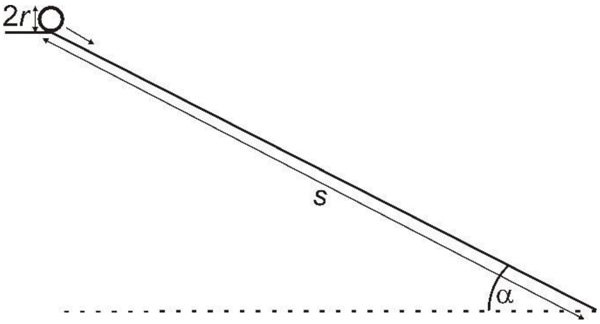
f) h=45 m ➔ t=3.03 s

Gedämpftes und ungedämpftes Federpendel

Ein Federpendel habe die Federkonstante D und die schwingende Masse m am Ende der Feder (die Feder selbst habe eine so geringe Masse, dass diese gegenüber m vernachlässigt werden kann). Eine Dämpfung der Schwingung durch Reibung wird mit der Konstante b beschrieben, wobei die Dämpfung allerdings nur so groß sein soll, dass trotzdem eine gedämpfte Schwingung zustande kommt (Kriechfall und aperiodischer Grenzfall sind also ausgeschlossen). Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen der folgenden Auswahl an.

Mögliche Fragen, die in verschiedenen Varianten vorkommen:
a) Für $b=0$ (d.h. keine Dämpfung) beträgt die Kreisfrequenz der Schwingung \omega=\sqrt{\large \frac{D}{m}}. (Korrekt)
b) Für $b\neq0$ (d.h. Dämpfung) beträgt die Kreisfrequenz der Schwingung \omega=\sqrt{\large \frac{D}{m}}. (Falsch)
c) Für $b\neq0$ (d.h. Dämpfung) verringert sich die Kreisfrequenz der Schwingung gegenüber der Kreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung. (Korrekt)
d) Für $b\neq0$ (d.h. Dämpfung) vergrößert sich die Kreisfrequenz der Schwingung gegenüber der Kreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung. (Falsch)
e) Die Amplitude einer ungedämpften Schwingung hängt davon ab, wie stark die Feder beim Anstoßen der Schwingung kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Korrekt)
f) Die Amplitude einer ungedämpften Schwingung ist unabhängig davon, wie stark die Feder beim Anstoßen der Schwingung kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Falsch)
g) Die Maximalgeschwindigkeit der Bewegung der Masse m während einer ungedämpften Schwingung ist größer, wenn die Feder beim Anstoßen der Schwingung stärker kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Korrekt)
h) Die Maximalgeschwindigkeit der Bewegung der Masse m während einer ungedämpften Schwingung ist geringer, wenn die Feder beim Anstoßen der Schwingung stärker kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Falsch)
i) Die Maximalgeschwindigkeit der Bewegung der Masse m während einer ungedämpften Schwingung ist größer, wenn die Feder beim Anstoßen der Schwingung geringer kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Falsch)
j) Die Maximalgeschwindigkeit der Bewegung der Masse m während einer ungedämpften Schwingung ist geringer, wenn die Feder beim Anstoßen der Schwingung geringer kontrahiert bzw. gedehnt wurde. (Korrekt)

Geschwindigkeit eines Hohlzylinders



Ein am Anfang ruhender Hohlzylinder der Masse m=1 kg mit Radius r=0.1 m rollt auf einer Strasse mit dem Neigungswinkel α=6° eine Strecke s=50 m hinab. Welche Geschwindigkeit v hat der Hohlzylinder am Ende dieser Strecke? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Die Schwerebeschleunigung beträgt g=9.81 m/s^2 und die Rollreibung oder Luftreibung wird vernachlässigt. Die Haftreibung sei natürlich so groß, dass der Hohlzylinder wirklich rollt und nicht rutscht.

Lösung:
Das Trägheitsmoment I des Hohlzylinders beträgt $I=mr^2$. Für die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich der Hohlzylinder am Ende dreht, gilt wegen der Abrollbedingung:

$$v = r\omega$$

Da die potentielle Energie am Anfang in kinetische Energie des Schwerpunkts und Rotationsenergie umgewandelt wird, gilt:

$$mgh = mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} = mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gs\sin\alpha} = 7.16 m/s$$

Varianten:
b) m=2 kg, r=0.1 m, α=7°, s=55 m ➔ v=8.11 m/s
c) m=2 kg, r=0.2 m, α=6.5°, s=50 m ➔ v=7.45 m/s
d) m=1 kg, r=0.2 m, α=7°, s=60 m ➔ v=8.47 m/s
e) m=2 kg, r=0.1 m, α=5.5°, s=45 m ➔ v=6.50 m/s
f) m=1 kg, r=0.1 m, α=8°, s=60 m ➔ v=9.05 m/s

Geschwindigkeit versus Reichweite eines Elektroautos

Bei einer Autofahrt auf ebener Strecke mit einer hohen Geschwindigkeit v ist der dominierende Widerstand der Strömungswiderstand, d.h. Reibung mit der umgebenden Luft. Bei ruhender Luft beträgt die Reibungskraft F_S aufgrund des Strömungswiderstands:

$$F_S = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2$$

Der Strömungswiderstandskoeffizient Ihres Autos betrage c_W=0.3, die Stirnfläche des Autos sei A=3 m^2 und die Dichte der Luft beträgt ρ=1.2 kg/m^3. Nun haben Sie ein Elektroauto gekauft, dessen Batterien eine Speicherkapazität von insgesamt W=50 kWh hat, wobei diese Energie dank hocheffizienter Elektromotoren quasi vollständig als mechanische Energie der Bewegung zur Verfügung steht. Sie möchten nun eine Strecke s=200 km bei konstanter Geschwindigkeit zurücklegen, wobei Ihre Batterien am Ende genau leer sein sollen. Mit welcher Geschwindigkeit v müssen Sie also fahren? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Hinweis: Weitere Verluste wie Rollreibung, etc. sollen hier gegenüber dem viel größeren Strömungswiderstand vernachlässigt werden.

Lösung:
Die Arbeit, die auf der Strecke s verrichtet wird, soll gleich der gespeicherten Energie der Batterien sein. Es gilt daher:

$$W = F_S s = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 s \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{c_W A \rho s}} = 40.8 \text{ m/s} = 145 \text{ km/h}$$

Varianten:
b) c_W=0.25, W=25 kWh, s=150 km ➔ v=131 km/h
c) c_W=0.3, W=25 kWh, s=150 km ➔ v=120 km/h
d) c_W=0.3, W=30 kWh, s=200 km ➔ v=114 km/h
e) c_W=0.25, W=30 kWh, s=200 km ➔ v=125 km/h
f) c_W=0.24, W=20 kWh, s=150 km ➔ v=120 km/h

Gravitationskraft auf Himmelskörpern

Berechnung Schwerebeschleunigung g_A auf Asteroiden, wobei nur Erdbeschleunigung g und Radius R_A/R_E (R_E: Radius der Erde) des Himmelskörpers relativ zur Erde bekannt sind. Außerdem noch das Verhältnis der mittleren Dichte ρ_A des Himmelskörpers zu der mittleren Dichte der Erde ρ_E.

Gravitationskraft einer Kugel wirkt vom Schwerpunkt der Kugel im Mittelpunkt der Kugel aus.
Dabei ist die Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche des Himmelskörpers:

$$g_A = \frac{F}{m} = G\frac{M_A}{R_A^2} = G\frac{4\pi\rho_A R_A^3/3}{R_A^2} = \frac{4\pi G\rho_A R_A}{3}$$

Analoges gilt bei der Erde, so dass das Verhältnis der Schwerebeschleunigungen den folgenden Wert hat:

$$\frac{g_A}{g} = \frac{\frac{4\pi G\rho_A R_A}{3}}{\frac{4\pi G\rho_E R_E}{3}} = \frac{\rho_A R_A}{\rho_E R_E}$$

Version 1: $\rho_A/\rho_E=2/5$, $R_A/R_E=1/14$ ➔ $g_A/g=1/35=0.028=2.8\%$
Version 2: $\rho_A/\rho_E=1/2$, $R_A/R_E=1/23$ ➔ $g_A/g=1/46=0.022=2.2\%$
Version 3: $\rho_A/\rho_E=3/5$, $R_A/R_E=1/23$ ➔ $g_A/g=3/115=0.026=2.6\%$
Version 4: $\rho_A/\rho_E=2/5$, $R_A/R_E=1/5$ ➔ $g_A/g=2/25=0.08=8\%$
Version 5: $\rho_A/\rho_E=3/10$, $R_A/R_E=1/5$ ➔ $g_A/g=3/50=0.06=6\%$
Version 6: $\rho_A/\rho_E=4/5$, $R_A/R_E=1/14$ ➔ $g_A/g=2/35=0.057=5.7\%$

Grundbegriffe der Interferenz zweier Wellen

Zwei punktförmige Quellen sollen gleichphasig Schallwellen gleicher Wellenlänge in die umgebende, homogene Luft aussenden. Kreuzen Sie in der folgenden Auswahl alle korrekten Aussagen an.

Mögliche Fragen, die in verschiedenen Varianten vorkommen:

a) Konstruktive Interferenz an einem bestimmten Punkt tritt auf, wenn der Weglängenunterschied zu den beiden Signalquellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. (Korrekt)

b) Konstruktive Interferenz an einem bestimmten Punkt tritt auf, wenn der Weglängenunterschied zu den beiden Signalquellen ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist. (Falsch)

c) Destruktive Interferenz an einem bestimmten Punkt tritt auf, wenn der Weglängenunterschied zu den beiden Signalquellen ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist. (Korrekt)

d) Destruktive Interferenz an einem bestimmten Punkt tritt auf, wenn der Weglängenunterschied zu den beiden Signalquellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. (Falsch)

e) An einem Punkt mit konstruktiver Interferenz wird die resultierende Lautstärke (=Schall-Leistung/Fläche) höher als die Summe der Lautstärken beider Quellen an diesem Punkt. (Korrekt)

f) An einem Punkt mit konstruktiver Interferenz wird die resultierende Lautstärke geringer als die Lautstärke jeder einzelnen Quelle an diesem Punkt. (Falsch)

g) An einem Punkt mit destruktiver Interferenz wird die resultierende Lautstärke sogar Null, wenn beide Wellen für sich die gleiche Lautstärke an dieser Stelle haben. (Korrekt)

h) An einem Punkt mit destruktiver Interferenz kann die resultierende Lautstärke größer werden als die Lautstärke jeder der beiden Wellen einzeln. (Falsch)

Grundgesetze der Drehung starrer Körper

Ein starrer Körper werde um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (Betrag ω) gedreht. Der Drehwinkel ist ϕ und die Zeit werde mit dem Symbol t bezeichnet. Sein Trägheitsmoment beträgt I, sein Drehimpuls $\vec{L}$ und seine Rotationsenergie ist E_{rot}. Von außen greife ein Drehmoment $\vec{D}$ an dem Körper an. Kreuzen Sie alle korrekten Formeln (und nur diese) der folgenden Auswahl an.

Mögliche Fragen, die in verschiedenen Varianten vorkommen:

$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ (korrekt)

$\omega = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}$ (falsch)

$E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ (korrekt)

$E_{rot} = \frac{\vec{L}\cdot\vec{L}}{2I}$ (korrekt)

$E_{rot} = \frac{\vec{L}\cdot\vec{D}}{2I}$ (falsch)

$E_{rot} = \frac{|\vec{L}|}{2I}$ (falsch)

$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (korrekt)

$\vec{D} = \frac{d^2\vec{L}}{dt^2}$ (falsch)

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ (korrekt)

$\vec{L} = \frac{1}{I}\vec{\omega}$ (falsch)

Grundgesetze der Mechanik

Wissensfragen: deshalb hier keine Musterlösung (Abfrage von Korrektheit oder Falschheit verschiedener Formelbeziehungen zwischen Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Masse, Impuls und kinetischer Energie bei einer eindimensionalen Bewegung)

Heimtrainer als Wasserpumpe

Sie sind gut trainiert und haben sich aus einem alten Heimtrainer (Fahrrad) eine Vorrichtung gebaut, mit der Sie pro Sekunde ein Volumen von V=10 l Wasser um eine Höhe h=2 m hochpumpen können. Wie viele Energiesparlampen mit je 23 W elektrischer Leistung (zur Info: eine 23 W Energiesparlampe entspricht vom Lichtstrom einer klassischen 100 W Glühbirne) könnten Sie also maximal gleichzeitig betreiben, wenn Sie anstatt Wasser hoch zu pumpen mit Ihrer Vorrichtung einen elektrischen Generator mit angenommenen 100% Wirkungsgrad betreiben würden? Beachten Sie bei der Rundung, dass Sie nur eine ganze Zahl an Energiesparlampen mit je 23 W betreiben können und pro Lampe mindestens 23 W benötigen!
Anmerkung: Die Dichte von Wasser beträgt ρ=1 kg/l und die Schwerebeschleunigung der Erde ist g=9.81 m/s^2.

Lösung:
Die pro Sekunde geleistete Hubarbeit beträgt:
$W = mgh = \rho Vgh$.
Hier: W=196.2 J
Die Leistung ist also $P=W/t=W/1$s=196.2 W
Damit könnten also $N=P/P_{\text{Lampe}}$=196.2 W/23 W=8.53 (also 8) Energiesparlampen betrieben werden.

Varianten:
b) V=8 l, h=2 m ➔ N=6.82, also 6
c) V=11 l, h=2.5 m ➔ N=11.73, also 11
d) V=10 l, h=2.5 m ➔ N=10.66, also 10
e) V=9 l, h=2 m ➔ N=7.68, also 7
f) V=9 l, h=2.5 m ➔ N=9.60, also 9

Hohlzylinder macht Looping (relativ schwer, da Radius des Hohlzylinders berücksichtigt werden muss. Deshalb nur 1x bisher verwendet)

Potentielle Energie *mgh* wird in kinetische Energie des Schwerpunkts des Hohlzylinders und Rotationsenergie umgesetzt. Wegen Abrollbedingung gilt für die Geschwindigkeit *v* des Schwerpunkts bei Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation $v=r\omega$.
Das Trägheitsmoment des Hohlzylinders ist $I=mr^2$.
Die Energiebilanz am oberen Punkt des Loopings lautet (der Schwerpunkt des Hohlzylinders wird am oberen Punkt des Loopings nur um 2(*R*-*r*) gehoben!):

$$E_{ges} = mgh = 2mg(R-r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 2mg(R-r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = 2mg(R-r) + mv^2$$

$$\Rightarrow v^2 = g(h - 2(R-r))$$

Nun muss am oberen Punkt die Schwerkraft gleich der Zentrifugalkraft sein, wobei hier die Lage des Schwerpunktes des Hohlzylinders betrachtet werden muss:

$$mg = m\frac{v^2}{R-r} \Rightarrow v^2 = g(R-r) = g(h-2(R-r)) \Rightarrow h = 3(R-r)$$

Version 1: Gefragt nach *h*: $h = 3(R-r)$

Version 2: Gefragt nach *R*: $R = r + \frac{h}{3}$

Version 3: Gefragt nach *r*: $r = R - \frac{h}{3}$

Version 4: Gefragt nach *h* (bei gegebenen Durchmessern): $h = \frac{3}{2}(D-d)$

Version 5: Gefragt nach *D*: $D = d + \frac{2h}{3}$

Version 6: Gefragt nach *d*: $d = D - \frac{2h}{3}$

Ideales Gas

Eine feste Stoffmenge n eines idealen Gases ist in einem Behälter bei den Anfangsbedingungen Temperatur 20^o C und Gasdruck 1 bar luftdicht eingeschlossen. Welcher Druck herrscht im Gas, wenn anschließend das Volumen halbiert wird und das Gas auf eine Temperatur von 100^o C aufgeheizt wird?

Lösung:

Allgemeine Gasgleichung (Volumen V, Druck p, Temperatur T, konstante Stoffmenge n, allgemeine Gaskonstante R):

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = const.$$

Zustand 1 mit Temperatur T_0=20^o C=293.15 K, Druck p_0=1 bar=10^5 Pa, Volumen V_0

Zustand 2: T=100^o C=373.15 K, Volumen V=$0.5V_0$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow p = p_0 \frac{T}{T_0}\frac{V_0}{V} = 1\,\mathrm{bar} \cdot \frac{373.15}{293.15} \cdot \frac{1}{0.5} = 2.55\,\mathrm{bar}$$

Variationen:

T=0^o C=273.15 K, V=$2V_0$ ➔ p=0.47 bar

T=200^o C=473.15 K, V=$2V_0$ ➔ p=0.81 bar

T=0^o C=273.15 K, V=$V_0/3$ ➔ p=2.80 bar

T=-20^o C=253.15 K, V=$V_0/4$ ➔ p=3.45 bar

T=-50^o C=223.15 K, V=$0.5V_0$ ➔ p=1.52 bar

Interferenz von Wasserwellen (Aufgabe nicht so geschickt: effektiv nur 2 Fragen, da jeweils zwei Fragen nicht gleichzeitig wahr sein können)

Mit Hilfe eines kleinen Stiftes, der periodisch in eine mit Wasser gefüllte Wanne getaucht wird und sich am Ort (x_S,0) befindet, wird eine Kreiswelle auf der Wasseroberfläche erzeugt. Zeit- und damit phasengleich und mit gleicher Frequenz erzeugt ein zweiter Stift am Ort ($-x_S$,0) eine zweite Kreiswelle. Die Wellenlänge der erzeugten Wellen sei λ und es gilt $x_S=a\lambda$.
Kreuzen Sie alle korrekten Antworten an.

Da phasengleiche Erzeugung befinden sich die Orte konstruktiver Interferenz an den Stellen mit Weglängendifferenz gleich $n\lambda$.

$$OPD=\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}-\sqrt{(x+x_S)^2+y^2}=n\lambda$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+x_S)^2+y^2}=\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}-n\lambda$$

$$\Rightarrow (x+x_S)^2+y^2=(x-x_S)^2+y^2+n^2\lambda^2-2n\lambda\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4x_S x-n^2\lambda^2=-2n\lambda\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 16x_S^2x^2+n^4\lambda^4-8n^2\lambda^2x_S x=4n^2\lambda^2\left(x^2+x_S^2-2x_S x+y^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(16x_S^2-4n^2\lambda^2\right)x^2=4n^2\lambda^2x_S^2+4n^2\lambda^2y^2-n^4\lambda^4$$

Der auf die Wellenlänge normierte Ort $\hat{x}=x/\lambda$ beträgt also:

$$\left(16a^2\lambda^2-4n^2\lambda^2\right)x^2=4n^2a^2\lambda^4+4n^2\lambda^4\left(y/\lambda\right)^2-n^4\lambda^4$$

$$\Rightarrow \hat{x}=\pm\sqrt{\frac{4n^2a^2+4n^2\hat{y}^2-n^4}{16a^2-4n^2}}=n\sqrt{\frac{a^2+\hat{y}^2-n^2/4}{4a^2-n^2}}$$

Gesucht sind Orte konstruktiver und destruktiver Interferenz.

Version 1: a=2
$\hat{y}$ =9 ➔ n=2, $\hat{x}=2\sqrt{7}$ ergibt konstruktive Interferenz.

Version 2: a=3
$\hat{y}$ =5 ➔ n=4, $\hat{x}=4\sqrt{3/2}$ ergibt konstruktive Interferenz.

Version 3: a=4
$\hat{y}$ =15 ➔ n=2, $\hat{x}=4$ ergibt konstruktive Interferenz.

Version 4: a=5
$\hat{y}$ =3 ➔ n=6, $\hat{x}=15/4$ ergibt konstruktive Interferenz.

Interferenz zweier Wasserwellen

Zwei Stifte tauchen periodisch jeweils zur gleichen Zeit in ein Wasserbecken ein und erzeugen dort zwei Kugelwellen der Wellenlänge λ, die miteinander interferieren. Der erste Stift befindet sich an den Wasseroberflächen-Koordinaten x_1=2 λ, y_1=0 während der zweite Stift sich bei x_2=0 und y_2=0 befindet. Berechnen Sie die Phasendifferenz der beiden Wellen am Ort x=0, y=10 λ. Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Lösung:
Die Weglängen-Differenz beider phasengleich erzeugten Kugelwellen beträgt auf der y-Achse:

$$OPD = \sqrt{(y-y_1)^2 + (x-x_1)^2} - \sqrt{(y-y_2)^2 + (x-x_2)^2} = \sqrt{y^2 + x_1^2} - y$$

Für die Phasendifferenz gilt dann:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} OPD = 2\pi\left[\sqrt{\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^2} - \frac{y}{\lambda}\right] = 0.396\pi$$

Varianten:
b) x_1=3 λ, y=13 λ ➔ $\Delta\Phi$=0.68 π
c) x_1=2 λ, y=13 λ ➔ $\Delta\Phi$=0.31 π
d) x_1=1.5 λ, y=13 λ ➔ $\Delta\Phi$=0.17 π
e) x_1=3 λ, y=15 λ ➔ $\Delta\Phi$=0.59 π
f) x_1=1.5 λ, y=19 λ ➔ $\Delta\Phi$=0.12 π

Kalten Kaffee mit heißem Wasser erwärmen

Der Kaffee in Ihrer Kanne mit einem gefüllten Volumen von V_{Kaffee}=0.2 l ist kalt geworden und hat nur noch eine Temperatur von T_1=20° C. Sie haben aber heißes Wasser mit einer Temperatur von T_2=80° C zur Verfügung. Also füllen Sie den Kaffee in ein dünnwandiges sehr gut Wärme leitendes Gefäß und stellen dieses in ein großes, sehr gut isolierendes Gefäß, das Sie mit dem heißen Wasser füllen können. Nach einiger Zeit stellt sich also ein Temperaturgleichgewicht zwischen dem vorher kalten Kaffee und dem vorher heißen Wasser ein, wobei angenommen wird, dass keine Wärme an die Umgebung abgegeben wird und die Wärmekapazität der beiden Gefäße vernachlässigbar klein ist. Welches Volumen V_{Wasser} an heißem Wasser müssen Sie einfüllen, damit Ihr Kaffee am Ende die Temperatur T_3=60° C hat? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert. Anmerkung: Da Kaffee zum größten Teil aus Wasser besteht, sind die spezifischen Wärmekapazitäten und Dichten von Kaffee und Wasser gleich.

Lösung:
Die vom heißen Wasser abgegebene Wärmemenge wird dem kalten Kaffee zugeführt und heizt ihn auf. Im Gleichgewicht gilt also, wobei ρ die Dichte (von Wasser und/oder Kaffee) und c die spezifische Wärmekapazität ist (auch wenn beide letztlich wieder aus der Formel herausfallen, da für Wasser und Kaffee gleich):

$$\Delta Q = V_{Wasser}\rho c\left(T_2 - T_3\right) = V_{Kaffee}\rho c\left(T_3 - T_1\right) \Rightarrow V_{Wasser} = V_{Kaffee}\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_3} = 0.4\,\mathrm{l}$$

Variationen:
b) V_{Kaffee}=0.4 l, T_1=20° C, T_2=90° C, T_3=50° C ➔ V_{Wasser}=0.3 l
c) V_{Kaffee}=0.45 l, T_1=25° C, T_2=75° C, T_3=50° C ➔ V_{Wasser}=0.45 l
d) V_{Kaffee}=0.35 l, T_1=20° C, T_2=80° C, T_3=50° C ➔ V_{Wasser}=0.35 l
e) V_{Kaffee}=0.4 l, T_1=25° C, T_2=90° C, T_3=50° C ➔ V_{Wasser}=0.25 l
f) V_{Kaffee}=0.15 l, T_1=20° C, T_2=70° C, T_3=60° C ➔ V_{Wasser}=0.6 l

Kavalierstart am Berg

Ein Angeber möchte sein neues Sportauto vorführen und behauptet, dass er bergauf bei 12% Steigung sein Gaspedal derart steuern kann, dass er aus dem Stand bis zu einer Geschwindigkeit von v_{max}=100 km/h mit konstanter Beschleunigung von a=9 m/s^2 beschleunigen kann. Die Masse des Autos (inkl. Insasse) beträgt m=1200 kg und die Schwerebeschleunigung der Erde ist g=9.81 m/s^2. Welche mechanische Leistung P muss der Motor des Autos also mindestens zur Verfügung stellen? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Zur Erinnerung: Die Steigung ist das Verhältnis zwischen der Höhenänderung und der waagrecht zurückgelegten Strecke bei einer schiefen Ebene. Außerdem vernachlässigen wir in der Aufgabe den Strömungswiderstand (oder andere Reibungskräfte), der bei 100 km/h durchaus einen gewissen Einfluss hätte.

Lösung:
Die Leistung P, die bei einer wirkenden Kraft F und der Geschwindigkeit v aufzubringen ist, lautet:

$$P = F\,v$$

Da hier mit konstanter Beschleunigung gefahren werden soll, und auch die zusätzlich zu überwindende „Hangabtriebskraft" konstant ist (α=arctan(0.12) sei der Neigungswinkel der schiefen Ebene), ist die Kraft insgesamt konstant, so dass die maximale Leistung bei der maximalen Geschwindigkeit v_{max} nötig ist. Insgesamt gilt also:

$$P_{max} = F\,v_{max} = (ma + mg\sin\alpha)v_{max} = 339\,\mathrm{kW}$$

Varianten:
b) Steigung 15%, a=8 m/s^2, m=1400 kg, v_{max}=80 km/h ➔ P=294 kW
c) Steigung 10%, a=6 m/s^2, m=1300 kg, v_{max}=80 km/h ➔ P=202 kW
d) Steigung 8%, a=5 m/s^2, m=1200 kg, v_{max}=80 km/h ➔ P=154 kW
e) Steigung 15%, a=9 m/s^2, m=1600 kg, v_{max}=110 km/h ➔ P=511 kW
f) Steigung 10%, a=6 m/s^2, m=1300 kg, v_{max}=100 km/h ➔ P=252 kW

Kraft- und Energiebetrachtung bei einer Pirouette (Teilfragen relativ schwer, z.B. wenn nach der Änderung der Rotationsenergie gefragt wird. Auch ungeschickte Fragestellung, da sich oft je zwei Fragen widersprechen, also nie gleichzeitig wahr sein können. Außerdem sind manche Teilaufgaben unterschiedlich schwer)

Ein Eiskunstläufer dreht sich bei einer Pirouette zuerst mit ausgestreckten Armen um seine eigene Achse. Danach zieht er die Arme an.

Kreuzen Sie alle korrekten Antworten an.

a) Mit angezogenen Armen dreht sich der Eiskunstläufer schneller. (Korrekt)
b) Mit angezogenen Armen dreht sich der Eiskunstläufer langsamer. (Falsch)
c) Bei angezogenen Armen erhöht sich die Rotationsenergie. (Korrekt, da während des Anziehens der Arme Arbeit gegen die Zentrifugalkraft geleistet wird)
d) Die Rotationsenergie bleibt gleich, egal ob die Arme ausgestreckt oder angezogen sind. (Falsch)

Ein Eiskunstläufer dreht sich bei einer Pirouette zuerst mit ausgestreckten Armen um seine eigene Achse. Danach zieht er die Arme an bzw. streckt sie danach wieder aus.

Kreuzen Sie alle korrekten Antworten an.

a) Mit ausgestreckten Armen dreht sich der Eiskunstläufer schneller. (Falsch)
b) Mit ausgestreckten Armen dreht sich der Eiskunstläufer langsamer. (Korrekt)
c) Beim Anziehen der Arme mit konstanter Geschwindigkeit muss der Eiskunstläufer eine Kraft zur Rotationsachse hin ausüben. (Korrekt)
d) Beim Ausstrecken der Arme mit konstanter Geschwindigkeit muss der Eiskunstläufer eine Kraft ausüben, die von der Rotationsachse weg zeigt. (Falsch, da die Arme durch die Zentrifugalkraft automatisch nach außen gezogen werden)

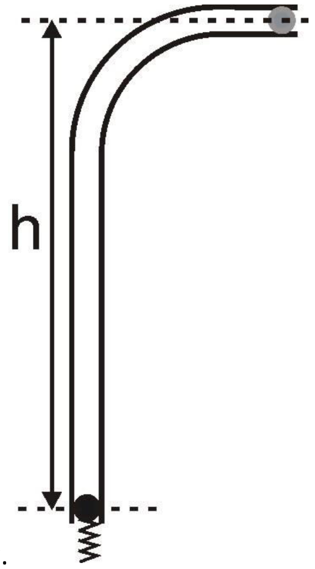
Ein Eiskunstläufer dreht sich bei einer Pirouette zuerst mit ausgestreckten Armen um seine eigene Achse. Danach zieht er die Arme an bzw. streckt sie danach wieder aus.

Kreuzen Sie alle korrekten Antworten an.

a) Mit ausgestreckten Armen ist die Winkelgeschwindigkeit des Eiskunstläufers höher. (Falsch)
b) Mit ausgestreckten Armen ist die Winkelgeschwindigkeit des Eiskunstläufers geringer. (Korrekt)
c) Beim Ausstrecken der Arme mit geringer, konstanter Geschwindigkeit muss der Eiskunstläufer eine Kraft zur Rotationsachse hin ausüben. (Korrekt, denn er muss nach wie vor die Zentrifugalkraft kompensieren)
d) Beim Anziehen der Arme mit geringer, konstanter Geschwindigkeit muss der Eiskunstläufer eine Kraft ausüben, die von der Rotationsachse weg zeigt. (Falsch, da er gegen die Zentrifugalkraft die Arme anziehen muss, also Kraft nach innen)

Kugel in Führungsschiene

Eine Kugel der Masse *m*=0.1 kg wird von einer gespannten Feder mit Federkonstante *D*=1000 N/m und Auslenkung *x*=0.1 m auf der Erde senkrecht nach oben in eine Führungsschiene (siehe Abbildung) geschossen, die keinerlei Reibung aufweist und die Kugel auch nicht in Rotation versetzt. Welche Geschwindigkeit *v* hat die Kugel unmittelbar am Ende der Führungsbahn, wenn sie diese horizontal verlässt? Der Abstand *h* zwischen dem Schwerpunkt der Kugel am unteren Startpunkt und ihrem Schwerpunkt beim Verlassen der Führungsschiene sei 1 m und die Schwerebeschleunigung



beträgt g=9.81 m/s^2.

Kreuzen Sie den Wert an, der der tatsächlichen Geschwindigkeit am nächsten ist.

Die potentielle Energie der Feder wird in kinetische Energie und potentielle Energie der Kugel im Schwerefeld der Erde umgewandelt.
Dabei gilt:

$$E_{pot,Feder} = \frac{1}{2}Dx^2 = E_{pot,Kugel} + E_{kin} = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}Dx^2 - mgh\right)}{m}}$$

Version 1: m=0.1 kg, h=1 m, D=1000 N/m, x=0.1 m ➔ v=8.97 m/s
Version 2: m=0.2 kg, h=2 m, D=1000 N/m, x=0.2 m ➔ v=12.68 m/s
Version 3: m=0.2 kg, h=2 m, D=500 N/m, x=0.2 m ➔ v=7.79 m/s
Version 4: m=1 kg, h=2 m, D=2000 N/m, x=0.2 m ➔ v=6.38 m/s
Version 5: m=1 kg, h=0.5 m, D=2000 N/m, x=0.1 m ➔ v=3.19 m/s
Version 6: m=0.5 kg, h=1 m, D=2000 N/m, x=0.1 m ➔ v=4.51 m/s

Leistung einer Windkraftanlage

Eine moderne Windkraftanlage kann 50% der kinetischen Energie des Windes, der die vom Rotor überstrichene Kreisfläche trifft, in nutzbare mechanische Energie des Rotors umwandeln (obwohl die üblicherweise drei Rotorblätter nur einen Bruchteil dieser Fläche wirklich auf einmal abdecken). Der Wind ströme nun mit der Geschwindigkeit v=36 km/h senkrecht auf die Rotorfläche mit dem Durchmesser D=100 m. Wie groß ist dann die nutzbare mechanische Leistung dieser Windkraftanlage? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Die Dichte der Luft betrage ρ=1.2 kg/m^3.

Lösung:
Die kinetische Energie pro Volumen des Windes ist $w=E_{\mathrm{kin}}/V=mv^2/(2V)=\rho v^2/2$. Folglich ist die transportierte Leistung P pro Fläche A (senkrecht zur Strömungsrichtung) gleich $P/A=\rho v^3/2$, da sich die Luft mit der Geschwindigkeit v bewegt und somit in der Zeit t ein Volumen $V=Az$ transportiert. Mit $v=z/t$ folgt also:

$$\frac{P}{A}=\frac{E_{kin}}{tA}=\frac{wV}{tA}=wv=\frac{1}{2}\rho v^3$$

Die nutzbare mechanische Leistung beträgt wegen des Wirkungsgrades 50% und der kreisförmigen Fläche mit Radius $D/2$ also:

$$P=\frac{1}{4}\rho v^3 A=\frac{1}{4}\rho v^3\left(\frac{D}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi}{16}\rho v^3 D^2$$

Hier also: P=2.36 MW

Varianten:
b) v=20 km/h, D=110 m ➔ P=0.49 MW
c) v=30 km/h, D=100 m ➔ P=1.36 MW
d) v=30 km/h, D=120 m ➔ P=1.96 MW
e) v=30 km/h, D=80 m ➔ P=0.87 MW
f) v=42 km/h, D=90 m ➔ P=3.03 MW

Maximaler Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine

Sie speisen eine ideale Wärmekraftmaschine („Carnot-Maschine“) mit einem Wärmebad der Temperatur T_1=200° C und führen die Abwärme einem „Kältebad“ der Temperatur T_2=20° C zu. Welcher Anteil der zugeführten Wärmeenergie kann maximal in mechanische Energie umgewandelt werden? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert. Anmerkung: Der absolute Nullpunkt der Temperatur liegt bei -273.15° C.

Lösung:
Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0.38 = 38\%$$

Variationen:
b) T_1=50° C, T_2=10° C ➔ η=12 %
c) T_1=150° C, T_2=20° C ➔ η=31 %
d) T_1=80° C, T_2=10° C ➔ η=20 %
e) T_1=310° C, T_2=20° C ➔ η=50 %
f) T_1=430° C, T_2=10° C ➔ η=60 %

Nasses Holz verbrennen

Komplett trockenes Holz hat einen Heizwert (frei werdende Wärmeenergie pro Trockenmasse des Holzes) von Q_H=5 kWh/kg. Leider haben Sie aber nur schlecht getrocknetes Holz zur Verfügung, dessen Wassergehalt (Massenanteil des Wassers an der Gesamtmasse des nassen Holzes) bei 30% liegt (zum Vergleich: gut getrocknetes Holz hat einen Wassergehalt von nur noch ca. 15%). Beim Verbrennungsvorgang muss also das enthaltene Wasser zuerst einmal von der Ausgangstemperatur T_0=20° C zum Siedepunkt (100° C) erhitzt und dann verdampft werden. Nur die dann übrig bleibende Wärmeenergie können Sie nutzen. Welchen effektiven Heizwert (nutzbare Wärmeenergie pro Masse des nassen Holzes) erhalten Sie also? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Angaben: spezifische Wärmekapazität von flüssigem Wasser c_{Wasser}=4.18 kJ/(kg K), Verdampfungswärme von Wasser λ_V=2257 kJ/kg.

Lösung allgemein:
Bei Feuchtigkeitsgehalt f (hier f=0.3) beträgt der Anteil der Masse des Wassers an der Masse m_{ges} des nassen Holzes $m_{\text{Wasser}}=f\, m_{\text{ges}}$. Nur die Masse $(1-f)m_{\text{ges}}$ ist Holztrockenmasse.
Also beträgt die nutzbare Wärmeenergie pro Masse (Temperaturdifferenz zum Aufheizen bis Siedepunkt ΔT=100° C – 20° C=80 K):

$$Q_{eff} = Q_H\left(1-f\right) - c_{Wasser} f\Delta T - \lambda_V f = Q_H\left(1-f\right) - f\left(c_{Wasser}\Delta T + \lambda_V\right) = 11800\,\text{kJ/kg} = 3.28\,\text{kWh/kg}$$

Anmerkungen: Eigentlich müsste der Aufheizvorgang der Holzmasse auch berücksichtigt werden und der entstehende Wasserdampf könnte im Prinzip natürlich auch noch Heizenergie wieder abgeben (oder sogar kondensieren und die gesamte Verdampfungswärme wieder abgeben, was aber in einfachen Holzöfen nie vorkommt). Dies wird in der Fragestellung aber explizit ausgeschlossen, so dass der Rechenweg klar sein sollte.

Variationen:
b) T_0=0° C, f=0.28 ➔ Q_{eff}=3.39 kWh/kg
c) T_0=0° C, f=0.24 ➔ Q_{eff}=3.62 kWh/kg
d) T_0=20° C, f=0.37 ➔ Q_{eff}=2.88 kWh/kg
e) T_0=20° C, f=0.26 ➔ Q_{eff}=3.51 kWh/kg
f) T_0=0° C, f=0.35 ➔ Q_{eff}=2.99 kWh/kg

Parameter einer ebenen Welle (sehr ähnlich zu der Frage „Einfache Kenngrößen von Wellen“)

Eine ebene Welle habe die Wellenlänge λ, die Frequenz ν, die Kreisfrequenz ω, die Wellenzahl k, die Schwingungsperiode T und die Phasengeschwindigkeit c.
Kreuzen Sie alle korrekten Beziehungen zwischen den Parametern der Welle an.

Mögliche Fragen, wobei aber nur die korrekten Beziehungen hier angegeben sind:
$c=\lambda/T$ (korrekt)
$c=\lambda\nu$ (korrekt)
$\nu=1/T$ (korrekt)
$\omega=2\pi/T$ (korrekt)
$\omega=2\pi\nu$ (korrekt)
$k=2\pi/\lambda$ (korrekt)
$k=\omega/c$ (korrekt)

Phasenübergänge

Wir betrachten einen Stoff, der je nach Temperatur und Druck in den unterschiedlichen Aggregatzuständen gasförmig, flüssig oder fest vorkommen kann. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

Korrekte Aussagen:

1. Die Zustandsänderung von flüssig nach gasförmig bezeichnet man als Verdampfen.
2. Die Zustandsänderung von gasförmig nach flüssig bezeichnet man als Kondensation.
3. Die Zustandsänderung von flüssig nach fest bezeichnet man als Gefrieren.
4. Die Zustandsänderung von fest nach flüssig bezeichnet man als Schmelzen.
5. Die Zustandsänderung von fest nach gasförmig bezeichnet man als Sublimation.
6. Die Zustandsänderung von gasförmig nach fest bezeichnet man als Desublimation.
7. Am Tripelpunkt kommen alle drei Aggregatzustände gleichzeitig vor.
8. An einem Phasenübergang kommen mindestens zwei Aggregatzustände gleichzeitig vor.
9. Für Temperaturen über der Temperatur des kritischen Punkts kommt der Stoff nur noch gasförmig vor, auch wenn man den Druck enorm erhöht.

Falsche Aussagen (nicht vollständig):

1. Die Zustandsänderung von flüssig nach gasförmig bezeichnet man als Gefrieren.

…

Pirouette im All

Eine Raumsonde der Masse *m*, die wir uns hier vereinfachend als einen dünnen Hohlzylinder mit Radius *r* vorstellen, dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse. Nachdem die Sonde ihr Ziel erreicht hat, fährt sie ihre Solarzellenpanele aus, die wir uns hier wiederum vereinfachend als einen zweiten konzentrischen, dünnen Hohlzylinder mit Radius *ar* vorstellen, wobei die Masse der Solarzellenpanele einen Anteil *b* der Gesamtmasse ausmacht. Die Verstrebungen zwischen beiden Hohlzylindern der Sonde seien näherungsweise masselos, aber beide Hohlzylinder bleiben trotzdem starr miteinander verbunden.
Wie groß ist die neue Winkelgeschwindigkeit?

Drehimpulserhaltung:

$$L = I\omega = mr^2\omega = \left[(1-b)mr^2 + bma^2r^2\right]\omega'$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{1-b+ba^2}$$

Version 1: a=5, b=0.2 ➔ $\omega'=\omega/5.8=5\omega/29$
Version 2: a=4, b=0.3 ➔ $\omega'=\omega/5.5=2\omega/11$
Version 3: a=6, b=0.2 ➔ $\omega'=\omega/8$
Version 4: a=6, b=0.5 ➔ $\omega'=\omega/18.5=2\omega/37$
Version 5: a=10, b=0.5 ➔ $\omega'=\omega/50.5=2\omega/101$

Pumpspeicher

Um die Energie, die mit Solarzellen aus Sonnenenergie gewonnen wird, auch nachts nutzen zu können, können Pumpspeicher benutzt werden, die zur Speicherung der Energie Wasser aus einem tiefen Loch in ein oberirdisches Reservoir pumpen und dann zur Nutzung der Energie das Wasser wieder in das Loch laufen lassen und am Boden des Lochs mit Hilfe einer Turbine elektrische Energie aus der gewonnenen kinetischen Energie des Wassers gewinnen.
Sie wollen sich mit Hilfe dieser Energie ein dickes Schnitzel braten und lassen dazu Ihre Herdplatte mit einer konstanten elektrischen Leistung von 1 kW für 30 Minuten laufen. Welches Volumen Wasser müssen Sie dazu in ein 90 m tiefes Loch laufen lassen?
Die Effizienz des Vorgangs wird mit 100% angenommen. Die Schwerebeschleunigung ist g=9.81 m/s^2 und die Dichte des Wassers ρ=1000 kg/m^3. Kreuzen Sie den nächstgelegenen Wert an.

Tiefe des Loches sei h, Volumen V des Wassers. Die gewonnene Energie ist dann:

$$E = mgh = \rho Vgh$$

Nötige Energie bei Leistung P der Herdplatte und Betriebsdauer t:

$$E = Pt = \rho Vgh \Rightarrow V = \frac{Pt}{\rho gh}$$

Version 1: P=1 kW, t=30 min=1800 s, h=90 m ➔ V=2.04 m^3=2040 Liter ➔ 2000 Liter
Version 2: P=1 kW, t=30 min=1800 s, h=75 m ➔ V=2.45 m^3=2450 Liter ➔ 2500 Liter
Version 3: P=1 kW, t=15 min=900 s, h=100 m ➔ V=0.92 m^3=920 Liter ➔ 1000 Liter
Version 4: P=2 kW, t=15 min=900 s, h=50 m ➔ V=3.67 m^3=3670 Liter ➔ 3500 Liter
Version 5: P=2 kW, t=30 min=1800 s, h=90 m ➔ V=4.08 m^3=4080 Liter ➔ 4000 Liter
Version 6: P=1 kW, t=20 min=1200 s, h=90 m ➔ V=1.36 m^3=1360 Liter ➔ 1500 Liter

Raketenabschuss

Sie haben eine Spielzeugrakete der Masse m=2 kg gebaut und wollen diese mit Hilfe einer kontrahierten Feder der Federkonstante D=5000 N/m exakt senkrecht nach oben schießen. Die Feder wird um x=20 cm kontrahiert, bevor die Rakete damit abgeschossen wird. Welche Höhe h (gemessen vom Schwerpunkt der Rakete vor dem Abschuss bis zum Schwerpunkt der Rakete bei der größten Höhe) erreicht dann die Spielzeugrakete? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Die Schwerebeschleunigung der Erde beträgt g=9.81 m/s^2.

Lösung:
Von Schwerpunkt zu Schwerpunkt bedeutet, dass man ersatzweise einen punktförmigen Körper rechnen kann.
In der Feder gespeicherte Energie wird am höchsten Punkt vollständig in potentielle Energie umgewandelt:

$$\frac{1}{2}Dx^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{Dx^2}{2mg}$$

Hier: h=5.10 m

Varianten:
b) m=2 kg, D=4000 N/m, x=30 cm ➔ h=9.17 m
c) m=1 kg, D=2000 N/m, x=20 cm ➔ h=4.08 m
d) m=1 kg, D=2500 N/m, x=25 cm ➔ h=7.96 m
e) m=1 kg, D=3000 N/m, x=20 cm ➔ h=6.12 m
f) m=2 kg, D=4500 N/m, x=25 cm ➔ h=7.17 m

Rettung im All

Durch einen kleinen Unfall während einer Außenmission auf der Internationalen Raumstation (ISS) schweben Sie in Ihrem Raumanzug alleine in einer Entfernung von s=10 m von der Einstiegsluke der ISS, wobei Sie relativ zur ISS in Ruhe sind. Sie müssen nun aus eigener Kraft die Luke erreichen und werfen einen Hammer der Masse m=1 kg mit einer Geschwindigkeit von v=5 m/s in entgegen gesetzter Richtung zur Verbindungslinie zwischen Ihnen und der Einstiegsluke, damit der Rückstoß Sie zur Luke treibt. Ihre Masse inkl. Raumanzug beträgt M=100 kg. Wie lange dauert es, bis Sie die Luke erreichen? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Der Einfachheit halber wird angenommen, dass Sie sich in dieser Aufgabe wie ein Massenpunkt verhalten, d.h. es wird nicht berücksichtigt, ob Sie z.B. mit Ihrem Arm schon zur Luke greifen können, bevor Ihr Schwerpunkt die Luke erreicht.

Lösung:
Beim schwerelosen Schweben im Weltall kann nur durch den Rückstoß (Raketenprinzip) eine Bewegung erzeugt werden. Dabei gilt für die Rückstoßgeschwindigkeit $v_{\text{Rückstoß}}$ die Impulserhaltung:

$$mv = Mv_{Rückstoß} \Rightarrow v_{Rückstoß} = \frac{m}{M}v$$

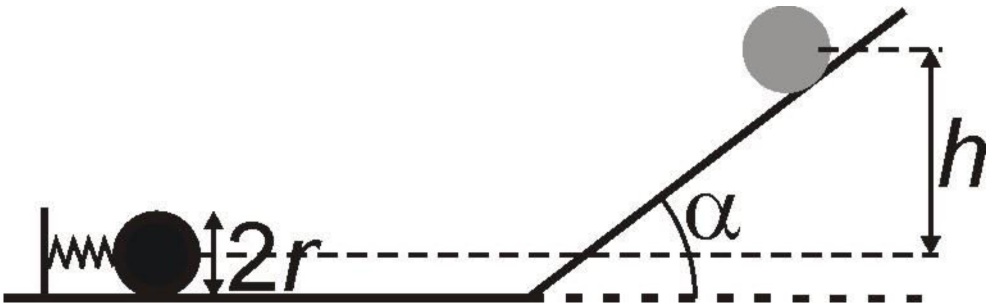
Nach dem Stoß bewegt sich der Astronaut mit konstanter Geschwindigkeit, so dass für die Zeit t gilt:

$$t = \frac{s}{v_{Rückstoß}} = \frac{sM}{mv} = 200\,\mathrm{s}$$

Varianten:
b) s=5 m, m=1 kg, M=120 kg, v=4 m/s ➔ t=150 s
c) s=6 m, m=1.5 kg, M=140 kg, v=6 m/s ➔ t=93 s
d) s=8 m, m=0.5 kg, M=120 kg, v=8 m/s ➔ t=240 s
e) s=7.5 m, m=1.2 kg, M=100 kg, v=2 m/s ➔ t=313 s
f) s=4 m, m=0.4 kg, M=140 kg, v=4 m/s ➔ t=350 s

Rollender Zylinder auf schiefer Ebene

Eine Feder der Federkonstante D=500 N/m wird um die Strecke x_0=0.1 m bezüglich ihrer Ruhelage zusammen gedrückt. Dann wird ein Vollzylinder mit Radius r=2 cm und Masse m=0.5 kg mit Hilfe der gespannten Feder beschleunigt und rollt nach einer kurzen ebenen Strecke eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α=30° hinauf. Um welche Höhe h wird der Schwerpunkt des Vollzylinders auf der schiefen Ebene angehoben, bevor der Zylinder zur Ruhe kommt bzw. rückwärts wieder herunter rollt? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert. Anmerkung: Die Schwerebeschleunigung der Erde ist g=9.81 m/s^2. Luftreibung und Rollreibung seien vernachlässigbar.



Lösung:
Am einfachsten löst man die Aufgabe mit der Energieerhaltung. Anfangs speichert die Feder die potentielle Energie $E_{\text{pot,Feder}}$. Diese wird in kinetische Energie des Zylinders umgesetzt, wobei ein Teil in kinetische Energie des Schwerpunkts und ein Teil in Rotationsenergie umgewandelt wird. Allerdings ist die Aufteilung hier egal, denn wenn der Zylinder am höchsten Punkt der schiefen Ebene zur Ruhe kommt, hat sich all die Energie in potentielle Energie im Schwerefeld der Erde umgewandelt. Es gilt also am Ende (wobei der Radius des Zylinders und auch der Neigungswinkel der schiefen Ebene irrelevant sind):

$$E_{pot,Feder} = \frac{1}{2} D x_0^2 = E_{pot,Höhe} = mgh \Rightarrow h = \frac{D x_0^2}{2mg} = 0.51\,\mathrm{m}$$

Varianten:
b) D=750 N/m, x_0=0.05 m, r=2 cm, m=0.5 kg, α=20° ➔ h=0.19 m
c) D=750 N/m, x_0=0.1 m, r=3 cm, m=0.6 kg, α=25° ➔ h=0.64 m
d) D=500 N/m, x_0=0.05 m, r=1.5 cm, m=0.2 kg, α=20° ➔ h=0.32 m
e) D=500 N/m, x_0=0.08 m, r=2.5 cm, m=0.4 kg, α=30° ➔ h=0.41 m
f) D=300 N/m, x_0=0.1 m, r=4 cm, m=1.5 kg, α=25° ➔ h=0.10 m

Rotierende Kugeln auf Stange

Drei gleich große Kugeln mit linienförmigen zentralen Bohrungen werden auf eine gemeinsame Achse gebracht und dann mit gleichem Drehsinn einzeln in Rotation versetzt (siehe Abbildung a)), wobei sie reibungsfrei um die Achse rotieren. Die Kugel 1 mit der Massendichte ρ habe die Winkelgeschwindigkeit ω, die Kugel 2 mit der Massendichte 2ρ habe die Winkelgeschwindigkeit 2ω und die Kugel 3 mit der Massendichte ρ sei in Ruhe. Dann werden die drei Kugeln längs der Achse zusammen geschossen, so dass sie aufgrund einer starken Klebeschicht danach mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Achse rotieren (siehe Abbildung b)). Wieviel Prozent der ursprünglichen Rotationsenergie haben die Kugeln noch nach dieser Aktion? Wählen Sie den nächstgelegenen Wert aus.

Rotationsenergie am Anfang:

$$E_{rot,0}=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right)$$

Drehimpuls am Anfang:

$$L=I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3$$

Drehimpuls bleibt erhalten, da kein Drehmoment wirkt. Drehimpuls nach der Aktion:

$$L=\left(I_1+I_2+I_3\right)\omega'\Rightarrow\omega'=\frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3}{I_1+I_2+I_3}$$

Rotationsenergie nach der Aktion:

$$E_{rot}'=\frac{1}{2}\left(I_1+I_2+I_3\right)\omega'^2\Rightarrow\frac{E_{rot}'}{E_{rot,0}}=\frac{\left(I_1+I_2+I_3\right)\omega'^2}{I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2}=\frac{\left(I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3\right)^2}{\left(I_1+I_2+I_3\right)\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right)}$$

Version 1: $I_1=I_0$, $\omega_1=\omega$, $I_2=2I_0$, $\omega_2=2\omega$, $I_3=I_0$, $\omega_3=0$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=25/(4*9)=69.4%

Version 2: $I_1=2I_0$, $\omega_1=\omega$, $I_2=I_0$, $\omega_2=2\omega$, $I_3=3I_0$, $\omega_3=0$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=16/(6*6)=44.4%

Version 3: $I_1=I_0$, $\omega_1=2\omega$, $I_2=2I_0$, $\omega_2=\omega$, $I_3=2I_0$, $\omega_3=2\omega$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=64/(5*14)=91.4%

Version 4: $I_1=I_0$, $\omega_1=\omega$, $I_2=2I_0$, $\omega_2=2\omega$, $I_3=3I_0$, $\omega_3=3\omega$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=14*14/(6*36)=90.7%

Version 5: $I_1=2I_0$, $\omega_1=\omega$, $I_2=2I_0$, $\omega_2=2\omega$, $I_3=3I_0$, $\omega_3=\omega$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=9*9/(7*13)=89.0%

Version 6: $I_1=5I_0$, $\omega_1=\omega$, $I_2=3I_0$, $\omega_2=2\omega$, $I_3=2I_0$, $\omega_3=3\omega$ ➔ $E_{rot}'/E_{rot,0}$=17*17/(10*35)=82.6%

Schlittenfahrt

Sie fahren mit einem Schlitten (Masse Schlitten + Person m=100 kg) einen Hang mit konstantem Neigungswinkel α=10° (= Winkel zwischen dem Hang und der Horizontalen) herunter, wobei Gleitreibung mit Gleitreibungskoeffizient μ=0.04 auftritt.
Welche Geschwindigkeit v erreichen Sie nach einer Strecke von s=50 m, wobei der Gleitreibungskoeffizient vereinfachend als geschwindigkeitsunabhängig angenommen wird. Kreuzen Sie den nächstgelegenen Wert an.
Andere Reibungskräfte wie Luftreibung etc. seien vernachlässigbar. Die Schwerebeschleunigung beträgt g=9.81 m/s^2.

Gleitreibung: $F_G = \mu F_N = \mu m g \cos\alpha$

Verrichtete Arbeit auf Strecke s: $W = F_G s = s\mu m g \cos\alpha$

Potentielle Energie, die freigesetzt wird: $E_{pot} = mgh = mgs\sin\alpha$

Kinetische Energie am Ende der Strecke:

$$E_{kin} = E_{pot} - W = mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

Version 1: α=10°, s=50 m, μ=0.04 ➔ v=11.5 m/s=41.3 km/h
Version 2: α=15°, s=50 m, μ=0.05 ➔ v=14.4 m/s=51.7 km/h
Version 3: α=9°, s=30 m, μ=0.04 ➔ v=8.3 m/s=29.9 km/h
Version 4: α=17°, s=50 m, μ=0.03 ➔ v=16.1 m/s=57.9 km/h
Version 5: α=18°, s=60 m, μ=0.06 ➔ v=17.2 m/s=62.0 km/h
Version 6: α=8°, s=40 m, μ=0.04 ➔ v=8.8 m/s=31.8 km/h

Schuß mit Kugel auf fernem Planeten

Eine Kugel wird auf einem Planeten mit der Schwerebeschleunigung *a* mit dem Geschwindigkeitsbetrag *v* unter dem Winkel α relativ zur Horizontalen abgeschossen. Das Ziel befindet sich genau auf gleicher Höhe in der horizontalen Entfernung *s* (*s*>0).
Version 1: Wie groß muss der Winkel α sein, damit das Ziel getroffen wird?
Version 2: Wie groß muss die Geschwindigkeit *v* sein, damit das Ziel getroffen wird?
Version 3: Wie groß muss die Entfernung *s* sein, damit das Ziel getroffen wird?
Version 4: Wie groß muss die Schwerebeschleunigung *a* des Planeten sein, damit das Ziel getroffen wird?
Hinweis: Reibung sei vernachlässigbar. Die Formel für den doppelten Winkel $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$ könnte nützlich sein.

Lösung:
Es gibt horizontale Geschwindigkeitskomponente $v_{x,0} = v\cos\alpha$

und vertikale Geschwindigkeitskomponente $v_{y,0} = v\sin\alpha$

Die horizontale Geschwindigkeitskomponente bleibt während der Bewegung konstant, während sich die vertikale Komponente aufgrund des freien Falls ändert. Da das Ziel auf gleicher Höhe sein soll, muss die vertikale Geschwindigkeitskomponente im Ziel gleich dem Negativen der Startkomponente sein: $v_{y,ziel}=-v_{y,0}$
Es gilt:

$$v_y(t) = v_{y,0} - gt = -v_{y,0} \Rightarrow t = \frac{2v_{y,0}}{g}$$

$$s = v_x t = v_{x,0} t = 2\frac{v_{x,0}v_{y,0}}{g} = 2\frac{v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha)$$

$$\Rightarrow sg = v^2\sin(2\alpha)$$

Version 1: $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{sg}{v^2}\right)$

Version 2: $v = \sqrt{\frac{sg}{\sin(2\alpha)}}$

Version 3: $s = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g}$

Version 4: $g = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{s}$

Schwerebeschleunigung auf Himmelskörpern

Zukünftige Astronauten wollen im Asteroidengürtel zwischen Mars und Jupiter auf einem Asteroiden eine Raumbasis errichten. Damit sie sich auf der Oberfläche des Asteroiden zumindest einigermaßen normal bewegen können, sollte die Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche nicht zu klein sein. Wie groß muss der Radius *R* des als kugelförmig und homogen angenommenen Asteroiden mit der Dichte ρ=3400 kg/m^3 sein, damit auf seiner Oberfläche eine Schwerebeschleunigung von g=0.1 m/s^2 herrscht? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert. Die Gravitationskonstante beträgt G=6.67·10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}.

Lösung:
Die Gravitationskraft eines kugelförmigen, homogenen Körpers der Masse *M* auf einen zweiten Körper ist identisch zu der Kraft zwischen zwei punktförmigen Körpern, die sich im Abstand des Radius *R* der Kugel befinden. Die Schwerebeschleunigung *g* ergibt sich also aus dem Gravitationsgesetz zu:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Die Masse des kugelförmigen Körpers ist:

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$$

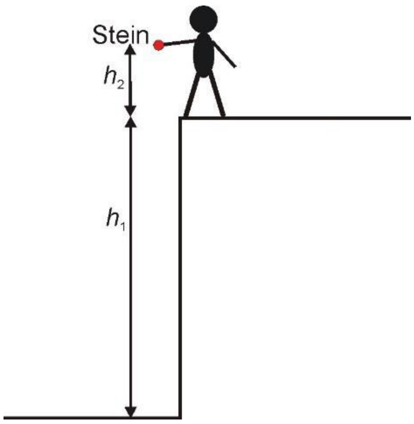
Also gilt:

$$g = \frac{4\pi}{3} \rho G R \;\Rightarrow\; R = \frac{3g}{4\pi\rho G} = 105\,\text{km}$$

Variationen:
b) ρ=2000 kg/m^3, g=0.11 m/s^2 ➔ R=197 km
c) ρ=2400 kg/m^3, g=0.1 m/s^2 ➔ R=149 km
d) ρ=2700 kg/m^3, g=0.19 m/s^2 ➔ R=252 km
e) ρ=2000 kg/m^3, g=0.03 m/s^2 ➔ R=54 km
f) ρ=3000 kg/m^3, g=0.25 m/s^2 ➔ R=298 km

Schwerebeschleunigung auf Jupitermond

Sie sind der erste Astronaut auf einem der Jupitermonde. Nun stehen Sie in Ihrem Raumanzug an der Abbruchkante einer h_1=20 m tiefen Schlucht und lassen dort einen Stein aus h_2=1.5 m Höhe hinunterfallen. Nach einer Zeit von t=4.0 s sehen Sie den Stein aufschlagen. Wie groß ist also die Schwerebeschleunigung des Jupitermondes? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.



Lösung:

Es gilt $h_1 + h_2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow g = \frac{2(h_1 + h_2)}{t^2} = 2.69\ \mathrm{m/s}^2$

Varianten:

b) h_1=15 m, h_2=1 m, t=5.0 s ➔ g=1.28 m/s^2
c) h_1=16 m, h_2=2 m, t=6.0 s ➔ g=1.00 m/s^2
d) h_1=11 m, h_2=1 m, t=4.0 s ➔ g=1.50 m/s^2
e) h_1=15 m, h_2=1 m, t=4.0 s ➔ g=2.00 m/s^2
f) h_1=10 m, h_2=1 m, t=3.0 s ➔ g=2.44 m/s^2

Schwerkraft bei kugelförmigen Himmelskörpern verschiedener Dichte

Wir stellen uns einen ideal kugelförmigen Planeten mit homogener Massenverteilung der Dichte ρ_0=5000 kg/m^3 vor. Er habe einen Radius R_0 und entsprechend auf seiner Oberfläche eine Schwerebeschleunigung g_0. Ein zweiter, ebenfalls ideal kugelförmiger Planet mit homogener Massenverteilung habe nun eine Dichte ρ_P=6000 kg/m^3 und einen Radius R_P. Wie groß muss das Verhältnis der Radien R_P/R_0 sein, damit auf der Oberfläche beider Planeten die gleiche Schwerebeschleunigung g_0 herrscht? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Lösung:
Die Masse M_0 des ersten Planeten, die Dichte ρ_0 und der Radius R_0 hängen zusammen über:

$$M_0 = \rho_0 V_0 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3$$

Die Schwerebeschleunigung g_0 an der Oberfläche ist (m sei die Masse eines Probekörpers):

$$g_0 = \frac{F_G}{m} = G\frac{M_0}{R_0^2} = G\frac{\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3}{R_0^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0 R_0$$

Für den zweiten Planeten gilt natürlich entsprechendes und daher für das Verhältnis der Radien R_P/R_0 bei gleicher Schwerebeschleunigung:

$$\frac{4\pi}{3}G\rho_0 R_0 = \frac{4\pi}{3}G\rho_P R_P \Rightarrow \frac{R_P}{R_0} = \frac{\rho_0}{\rho_P} = \frac{5}{6} = 0.833$$

Varianten:
b) ρ_0=5000 kg/m^3, ρ_P=7000 kg/m^3 ➔ R_P/R_0=5/7=0.714
c) ρ_0=4000 kg/m^3, ρ_P=6500 kg/m^3 ➔ R_P/R_0=8/13=0.615
d) ρ_0=6000 kg/m^3, ρ_P=5000 kg/m^3 ➔ R_P/R_0=6/5=1.2
e) ρ_0=7000 kg/m^3, ρ_P=5000 kg/m^3 ➔ R_P/R_0=7/5=1.4
f) ρ_0=6500 kg/m^3, ρ_P=4000 kg/m^3 ➔ R_P/R_0=13/8=1.625

Schwingung an Kran

An einem hohen Kran hängt eine Stahlfeder mit einer Federkonstante D=100 N m^{-1} und daran eine sich in Ruhe befindende Kabine, wobei die Masse der Feder und der Kabine vernachlässigbar klein sind. Nun steigen Sie mit Gepäck in die Kabine ein, deren Arretierung danach gelöst wird. Die Masse der mit Ihnen besetzten Kabine beträgt m=100 kg. Nach welcher Zeit hat sich der Kabinenboden gegenüber der Anfangslage um x=10 m gesenkt? Wählen Sie den nächstgelegenen Wert.

Die Schwerebeschleunigung der Erde wird vereinfachend mit g=10 m/s^2 angenommen.

Die Auslenkung wird gerade so gewählt, dass sie der Gleichgewichtslage entspricht, die die Kabine nach Abklingen der einsetzenden Schwingung einnimmt, und somit dem zentralen Punkt der Schwingung entspricht: $mg=Dx$
Zwischen dem Start zum Zeitpunkt Null und der gesuchten Zeit t wird also eine Viertel Schwingung ausgeführt und es gilt:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{T}{2\pi} = \frac{\pi}{2\omega}$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{D}}$

Version 1: m=100 kg, D=100 N m^{-1} ➔ x=10 m, t=1.57 s
Version 2: m=80 kg, D=100 N m^{-1} ➔ x=8 m, t=1.40 s
Version 3: m=80 kg, D=200 N m^{-1} ➔ x=4 m, t=0.99 s
Version 4: m=100 kg, D=200 N m^{-1} ➔ x=5 m, t=1.11 s
Version 5: m=120 kg, D=100 N m^{-1} ➔ x=12 m, t=1.72 s

Schwingungsdauer eines ungedämpften Federpendels

Ein ungedämpft schwingendes Federpendel der Masse *m*=1 kg und der Federkonstante *D*=100 N/m soll drei volle Schwingungsperioden ausführen. Wie lange braucht das Federpendel dazu? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.

Lösung:
Die Kreisfrequenz eines ungedämpften Federpendels bzw. die Schwingungsdauer *T* für eine Periode ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Für *N*=3 Schwingungsperioden braucht das Pendel also:

$$t = NT = 2\pi N\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Hier: *t*=1.88 s

Varianten:
b) *m*=2 kg, *D*=100 N/m, *N*=2 ➔ *t*=1.78 s
c) *m*=2 kg, *D*=80 N/m, *N*=2 ➔ *t*=1.99 s
d) *m*=1 kg, *D*=75 N/m, *N*=3 ➔ *t*=2.18 s
e) *m*=2 kg, *D*=50 N/m, *N*=2 ➔ *t*=2.51 s
f) *m*=1 kg, *D*=60 N/m, *N*=3 ➔ *t*=2.43 s

Sprung von Turm

Sie nehmen auf einem 5 m hohen Turm am Rande eines Sprungbeckens Anlauf und laufen einfach horizontal bis zum Ende des (unbeweglichen) Sprungbretts. Dort haben Sie eine Geschwindigkeit von 5 m/s erreicht.
In welcher horizontalen Entfernung vom Ende des Sprungbretts erreichen Ihre Füße die Wasseroberfläche unter der Annahme, dass Sie sich während des Sprungs nicht drehen? Wählen Sie den nächstgelegenen Wert.
Die Schwerebeschleunigung beträgt g=9.81 m/s^2.

Horizontale Bewegung ist mit konstanter Geschwindigkeit v_x und die vertikale Bewegung ist ein freier Fall mit Anfangsgeschwindigkeit Null.
Zeit bis zum Erreichen der Wasseroberfläche in der Entfernung h bzw. zurückgelegte horizontale Strecke x:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow x = v_x t = v_x \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Version 1: v_x=5 m/s, h=5 m ➔ x=5.05 m
Version 2: v_x=4 m/s, h=5 m ➔ x=4.04 m
Version 3: v_x=5 m/s, h=7 m ➔ x=5.97 m
Version 4: v_x=6 m/s, h=7 m ➔ x=7.17 m
Version 5: v_x=6 m/s, h=9 m ➔ x=8.13 m

Stoß auf der Sommerrodelbahn

Sie haben mit Ihrem Fahrzeug (Masse inkl. Insasse m_2=90 kg) auf einer Sommerrodelbahn vor einer Kurve auf praktisch Geschwindigkeit Null (v_2=0) abgebremst, als Sie plötzlich von hinten von einem Fahrzeug (Masse inkl. Insasse m_1=120 kg) unsanft angestoßen werden. Unmittelbar nach dem Stoß bewegt sich Ihr Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von v_2'=10 km/h weiter und Sie möchten wissen, mit welcher Geschwindigkeit v_1 der „Rowdy“ Sie von hinten angestoßen hat. Rechnen Sie also v_1 aus und markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkungen: Reibung sei vernachlässigbar und der Stoß sei elastisch. Außerdem müssen Sie keinerlei Hangabtriebskräfte der Rodelbahn berücksichtigen, da Sie nur die Geschwindigkeiten unmittelbar vor bzw. nach dem Stoßprozess interessieren.

Lösung:
Energie- und Impulserhaltung vor und nach dem Stoß:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$p = m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'$$

$$\Rightarrow m_1 v_1^2 = m_1 \left(v_1^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2'^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_1 v_2' \right) + m_2 v_2'^2$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{m_2}{m_1} (m_2 + m_1) v_2'^2 - 2 m_2 v_1 v_2' \overset{v_2' \neq 0}{\Rightarrow} v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1} v_2' = 8.75 \text{ km/h} \approx 9 \text{ km/h}$$

Varianten:
b) m_1=100 kg, m_2=90 kg, v_2'=10.5 km/h ➔ v_1=10.0 km/h≈10 km/h
c) m_1=80 kg, m_2=120 kg, v_2'=9.5 km/h ➔ v_1=11.9 km/h≈12 km/h
d) m_1=100 kg, m_2=120 kg, v_2'=12 km/h ➔ v_1=13.2 km/h≈13 km/h
e) m_1=120 kg, m_2=100 kg, v_2'=15 km/h ➔ v_1=13.8 km/h≈14 km/h
f) m_1=80 kg, m_2=100 kg, v_2'=10 km/h ➔ v_1=11.3 km/h≈11 km/h

Tauchgang in U-Boot

Sie wollen einen Tauchgang in einem kleinen Einmann-U-Boot unternehmen. Das U-Boot hat keine Druckausgleichsanlage, so dass Sie in der Kabine immer den Luftdruck an der Wasseroberfläche haben. Leider merken Sie erst zu Beginn des Tauchgangs, dass sich in der Stahlhülle des U-Boots ein kreisförmiges Loch mit 1 cm Durchmesser befindet, das nur mit einem Propfen abgedichtet ist, der sich sofort löst, sobald der Außendruck größer als der Innendruck ist.
Welche Kraft müssen Sie aufwenden, um den Propfen in einer Wassertiefe von 10 m auf dem Loch zu halten? Wählen Sie den nächstgelegenen Wert aus.
Dichte des Wassers ρ=1000 kg/m^3, Schwerebeschleunigung *g*=9.81 m/s^2.

Druckzunahme im Wasser in Tiefe *h*: $p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho g V}{A} \overset{V=Ah}{=} \rho g h$

Da der Innendruck gleich dem Luftdruck an der Wasseroberfläche ist, wirkt also in der Tiefe *h* (Druck durch Wasser + Luftdruck an Oberfläche) auf die kreisförmige Fläche mit Durchmesser *d* eine Kraft:

$$F = p\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \rho g h \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Version 1: *d*=1 cm=0.01 m, *h*=10 m ➔ *F*=7.7 N
Version 2: *d*=2 cm=0.02 m, *h*=10 m ➔ *F*=30.8 N
Version 3: *d*=2 cm=0.02 m, *h*=20 m ➔ *F*=61.6 N
Version 4: *d*=3 cm=0.03 m, *h*=10 m ➔ *F*=69.3 N
Version 5: *d*=2 cm=0.02 m, *h*=16 m ➔ *F*=49.3 N

Trägheitsmomente verschiedener Körper

Es sind 6 Massenpunkte mit je der gleichen Masse *m* gegeben, die wie in der unten gezeigten Grafik an den Orten P1 bis P6 angeordnet sind. Man stelle sich vor, dass alle Massenpunkte durch (fast) masselose Verbindungen starr miteinander verbunden sind und um die eingezeichnete Drehachse in der Mitte rotieren können. Wie groß ist das Trägheitsmoment *I* des auf diese Weise entstandenen starren Körpers?

Lösung:
Je nach Variante gibt es natürlich ein anderes Trägheitsmoment.

F1: $I = 4mr_0^2 + 2m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}mr_0^2$

F2: $I = 2mr_0^2 + 4m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = 3mr_0^2$

F3: $I = 3mr_0^2 + 3m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}mr_0^2$

F4: $I = 3mr_0^2 + 3m\left(\frac{r_0}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}mr_0^2$

F5: $I = 2mr_0^2 + 4m\left(\frac{r_0}{3}\right)^2 = \frac{22}{9}mr_0^2$

F6: $I = 4mr_0^2 + 2m\left(\frac{r_0}{3}\right)^2 = \frac{38}{9}mr_0^2$

Wasserdruck

Sie wohnen im 5. Obergeschoss eines Hauses, wobei jedes Stockwerk (inkl. Bodendicke) 3 m hoch ist. Im Keller befindet sich 2.5 m unter dem Boden des Erdgeschosses eine Druckerhöhungsanlage, die garantieren soll, dass auch an Ihrem Wasserhahn, der sich 1 m über dem Boden Ihres Stockwerks befindet, ein Wasserdruck von 4 bar anliegt. Welchen Wasserdruck muss also die Druckerhöhungsanlage am Ausgang generieren? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Die Dichte von Wasser beträgt ρ=1000 kg/m^3 und die Schwerebeschleunigung der Erde ist g=9.81 m/s^2. Weiterhin bleibt der Druck der Atmosphäre außer Acht, da er sowohl an der Druckerhöhungsanlage als auch am Wasserhahn anliegt.

Lösung:
Die zu überwindende Höhe ist insgesamt h=2.5 m+5*3 m+1m=18.5 m.
Um also in dieser Höhe noch einen Restdruck von p_0=4 bar zu haben, muss der Druck am Ausgang der Druckerhöhungsanlage betragen:

$$p = \rho g h + p_0 = 5.81\,\text{bar}$$

Varianten:
b) 6. Stock, Anlage 3 m unter Erdgeschoss, Wasserhahnhöhe 1 m, p_0=4 bar ➔ p=6.16 bar
c) 3. Stock, Anlage 3 m unter Erdgeschoss, Wasserhahnhöhe 1 m, p_0=4.5 bar ➔ p=5.78 bar
d) 4. Stock, Anlage 2.5 m unter Erdgeschoss, Wasserhahnhöhe 1 m, p_0=4.5 bar ➔ p=6.02 bar
e) 7. Stock, Anlage 2.5 m unter Erdgeschoss, Wasserhahnhöhe 1 m, p_0=4 bar ➔ p=6.40 bar
f) 6. Stock, Anlage 2.5 m unter Erdgeschoss, Wasserhahnhöhe 1 m, p_0=4.5 bar ➔ p=6.61 bar

Wege im pV-Diagramm

Wir betrachten eine feste Stoffmenge *n* eines idealen Gases. Seine Zustandsänderung bzgl. Volumen *V* und Druck *p* kann in einem pV-Diagramm durch Kurven grafisch dargestellt werden.
Kreuzen Sie für die Kurven A bis C alle korrekten Aussagen an. Die Pfeile an den Kurven geben dabei an, in welcher Richtung die Kurven durchlaufen werden.

A: Isochore
B: Isobare
C: Isotherme

Auf der Kurve A verrichtet das Gas Arbeit. Nein
Auf der Kurve B ändert sich die Temperatur *T* des Gases. X
Auf der Kurve C bleibt die innere Energie des Gases konstant. X
Auf der Kurve B ändert sich der Druck des Gases. Nein
Auf der Kurve B verrichtet das Gas Arbeit. X
Auf der Kurve C ändert sich die Temperatur *T* des Gases. Nein
Auf der Kurve A bleibt die innere Energie des Gases konstant. Nein
Auf der Kurve A ändert sich der Druck des Gases. X
Auf der Kurve B wird dem Gas Wärmeenergie zugeführt. X
Auf der Kurve C verrichtet das Gas Arbeit. X
Auf der Kurve A gibt das Gas Wärmeenergie ab. Nein
Auf der Kurve C ändert sich die innere Energie des Gases. Nein
Auf der Kurve A wird dem Gas Wärmeenergie zugeführt. X
Auf der Kurve B bleibt die Temperatur *T* konstant. Nein
Auf der Kurve A wird an dem Gas Arbeit verrichtet. Nein
Auf der Kurve A ändert sich die innere Energie des Gases. X
Auf der Kurve B nimmt die innere Energie des Gases zu. X
Auf der Kurve A ändert sich das Volumen *V* des Gases. Nein

Wellentypen (hier gibt es nur drei Varianten, also weniger als die sonst meist 6 üblichen Varianten)

F1: Gegeben sei eine ebene Welle, die sich im Raum längs der Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ ausbreitet. Dabei gibt es folgende Größen: Ortsvektor $\vec{r}$, die Zeit t, Kreisfrequenz ω, Proportionalitätskonstante A_0 (mit jeweils angepasster Einheit, so dass am Ende eine Auslenkung resultiert), Auslenkung der Welle ξ.
Welche der folgenden Formeln beschreibt eine ebene Welle korrekt?
Lösung: $\xi(\vec{r},t) = A_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$
Amplitude bleibt konstant. Phase muss Ebenen beschreiben, deshalb Skalarprodukt!

F2: Gegeben sei eine Kreiswelle, die sich auf einer Oberfläche vom Erregungszentrum (= Nullpunkt des Koordinatensystems) ausbreitet. Dabei gibt es folgende Größen: (zweidimensionaler) Ortsvektor $\vec{r}$ auf der Oberfläche, Zeit t, Kreisfrequenz ω, Wellenvektor $\vec{k}$, Proportionalitätskonstante A_0 (mit jeweils angepasster Einheit, so dass am Ende eine Auslenkung resultiert), Auslenkung der Welle ξ.
Welche der folgenden Formeln beschreibt eine Kreiswelle auf einer Oberfläche korrekt?
Lösung: $\xi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{\sqrt{|\vec{r}|}} \sin\left(\omega t - |\vec{k}||\vec{r}|\right)$
Amplitude nimmt umgekehrt proportional zur Wurzel des Radius ab, so dass die Intensität mit 1/r geht (da nur auf Oberfläche). Phase geht wie bei Kugelwelle mit Produkt aus k und r (nicht mit Skalarprodukt der Vektoren!), wobei hier aber der Ortsvektor $\vec{r}$ ein zweidimensionaler Vektor auf der Oberfläche ist.

F3: Gegeben sei eine Kugelwelle, die sich im Raum vom Erregungszentrum (= Nullpunkt des Koordinatensystems) ausbreitet. Dabei gibt es folgende Größen: Ortsvektor $\vec{r}$, Zeit t, Kreisfrequenz ω, Wellenvektor $\vec{k}$, Proportionalitätskonstante A_0 (mit jeweils angepasster Einheit, so dass am Ende eine Auslenkung resultiert), Auslenkung der Welle ξ.
Welche der folgenden Formeln beschreibt eine Kugelwelle im Raum korrekt?
Lösung: $\xi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{|\vec{r}|} \sin\left(\omega t - |\vec{k}||\vec{r}|\right)$
Amplitude nimmt mit 1/r ab, so dass Intensität mit $1/r^2$ abnimmt. Phase wie bei Kreiswelle, aber für dreidimensionalen Ortsvektor bzw. Betrag r.

Wärmedämmung

Sie haben sich Ihren "Traum" erfüllt und ein würfelförmiges Glashaus mit Kantenlänge a=7 m gebaut, das vollständig aus Isolierglas mit einem Wärmedurchgangskoeffizienten (=durch das Glas tretende Wärmeleistung pro Fläche und Temperaturunterschied zwischen innen und außen) von k=0.4 W/(m^2 K) besteht. Vereinfachend wird angenommen, dass der Boden des Hauses ideal isoliert ist, so dass nur die vier Außenwände und das Dach des Würfels zum Wärmeverlust beitragen.
Welche Heizleistung muss Ihr Ofen liefern, wenn Sie bei einer Außentemperatur von -10^{o} C eine konstante Innentemperatur von +20^{o} C aufrecht erhalten wollen? Weitere Wärmequellen im Haus (z.B. Abwärme von Menschen, Heizplatten in der Küche, Lampen, etc.) werden vernachlässigt.

Lösung:
Die Außenfläche A besteht aus 5 Würfelflächen mit je Kantenlänge a, also A=5a^2.
Der Temperaturunterschied zwischen innen und außen beträgt ΔT=30 K.
Damit ist die Verlustleistung P des Hauses:

$$P = kA\Delta T = 5ka^2\Delta T = 5 \cdot 0.4\ \mathrm{W}/\left(\mathrm{m}^2\ K\right) \cdot \left(7\ \mathrm{m}\right)^2 \cdot 30\ \mathrm{K} = 2940\ \mathrm{W}$$

Variationen:
a=6 m, T_{innen}=20^{o} C, $T_{außen}$=0^{o} C, k=0.5 W/(m^2 K) ➔ P=1800 W
a=8 m, T_{innen}=20^{o} C, $T_{außen}$=0^{o} C, k=0.5 W/(m^2 K) ➔ P=3200 W
a=8 m, T_{innen}=20^{o} C, $T_{außen}$=-10^{o} C, k=0.4 W/(m^2 K) ➔ P=3840 W
a=7 m, T_{innen}=20^{o} C, $T_{außen}$=-20^{o} C, k=0.5 W/(m^2 K) ➔ P=4900 W
a=7 m, T_{innen}=20^{o} C, $T_{außen}$=-10^{o} C, k=0.6 W/(m^2 K) ➔ P=4410 W

Wärmekapazität von Gasen

Sie wollen 1 mol Stickstoff (N_2) bei konstantem Volumen von 150 K auf 750 K erhitzen. Welche Wärmeenergie müssen Sie hierfür zuführen?
Beachten Sie, dass Stickstoff unterhalb von 200 K nur drei Freiheitsgrade (nur Translationen) hat, zwischen 200 K und 600 K fünf Freiheitsgrade (Translationen + zwei Rotationen) und über 600 K sogar sieben Freiheitsgrade (zusätzlich noch eine Schwingung mit zwei Freiheitsgraden). Vereinfachend wird angenommen, dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade abrupt bei den genannten Temperaturen ändert. Die allgemeine Gaskonstante beträgt R=8.314 J/(mol K). Außerdem ist Stickstoff im gesamten genannten Bereich gasförmig.

Lösung:
Für jeden Abschnitt mit gleicher Anzahl an Freiheitsgraden gilt: $\Delta Q = C_{mV}\, n\, \Delta T = fnR\, \Delta T/2$ mit der Anzahl f der Freiheitsgrade.

$$Q = 1.5nR\Delta T_1 + 2.5nR\Delta T_2 + 3.5nR\Delta T_3 = nR\left(1.5\Delta T_1 + 2.5\Delta T_2 + 3.5\Delta T_3\right) =$$
$$= 8.314\,\mathrm{J/K} \cdot \left(1.5\cdot 50\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 150\,\mathrm{K}\right) = 13.3\,\mathrm{kJ}$$

Variationen:

2. Von 100 K auf 650 K erhitzen ➔ $Q = 8.314\,\mathrm{J/K}\cdot\left(1.5\cdot 100\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 50\,\mathrm{K}\right) = 11.0\,\mathrm{kJ}$
3. Von 150 K auf 650 K erhitzen ➔ $Q = 8.314\,\mathrm{J/K}\cdot\left(1.5\cdot 50\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 50\,\mathrm{K}\right) = 10.4\,\mathrm{kJ}$
4. Von 100 K auf 680 K erhitzen ➔ $Q = 8.314\,\mathrm{J/K}\cdot\left(1.5\cdot 100\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 80\,\mathrm{K}\right) = 11.9\,\mathrm{kJ}$
5. Von 160 K auf 620 K erhitzen ➔ $Q = 8.314\,\mathrm{J/K}\cdot\left(1.5\cdot 40\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 20\,\mathrm{K}\right) = 9.4\,\mathrm{kJ}$
6. Von 190 K auf 610 K erhitzen ➔ $Q = 8.314\,\mathrm{J/K}\cdot\left(1.5\cdot 10\,\mathrm{K} + 2.5\cdot 400\,\mathrm{K} + 3.5\cdot 10\,\mathrm{K}\right) = 8.7\,\mathrm{kJ}$

Wärmekapazität von Wasser

Sie mischen bei Normaldruck 1 kg Wassereis (m_1=1 kg) mit einer Temperatur von T_1=-10° C und m_2=1 kg flüssiges Wasser mit einer Temperatur von T_2=90° C. Die Wärmekapazität des ideal Wärme isolierenden Gefäßes sei vernachlässigbar, so dass Sie also nur das System Eis und Wasser betrachten müssen.
Welche Temperatur stellt sich nach dem vollständigen Temperaturausgleich ein und in welcher Form liegt das Wasser vor, wobei es keine Wärmeverluste an die Umgebung geben soll?
Angaben: spezifische Wärmekapazität von Wassereis c_{Eis}=2.06 kJ/(kg K), spezifische Wärmekapazität von flüssigem Wasser c_{Wasser}=4.18 kJ/(kg K), Schmelzwärme von Wasser/Eis λ_S=334 kJ/kg

Lösung allgemein:
Körper 1 mit Masse m_1 und Temperatur T_1 (fester Zustand) nimmt Wärme von Körper 2 mit Masse m_2 und Temperatur $T_2>T_1$ (flüssiger Zustand) auf, wobei der Körper 1 auch noch eine Phasenumwandlung durchmachen muss, wozu eine Energie Q nötig ist. Die Temperatur am Ende beträgt T_f.
Es wird hier immer angenommen, dass am Ende flüssiges Wasser vorliegt. Dazu muss also die Wärme, die der wärmere Körper 2 beim Abkühlen auf 0° C abgeben würde, größer sein als die Wärme, die nötig ist, um den Körper 1 auf 0° C zu erwärmen und zu schmelzen.

$$c_{Eis}m_1(T_0-T_1)+c_{Wasser}m_1(T_f-T_0)+\lambda_S m_1=c_{Wasser}m_2(T_2-T_f)$$

Hierbei ist die Hilfsgröße T_0=0° C, bei der Eis schmilzt.

Um eine Umrechnung auf absolute Temperaturen zu sparen, kann man folgende Umformung machen:

$$c_{Eis}m_1(T_0-T_1)+c_{Wasser}m_1(T_f-T_0)+\lambda_S m_1=c_{Wasser}m_2(T_2-T_f)=c_{Wasser}m_2(T_2-T_0+T_0-T_f)=$$
$$=c_{Wasser}m_2(T_2-T_0)-c_{Wasser}m_2(T_f-T_0)$$

Aufgelöst nach T_f–T_0 ergibt sich:

$$\Rightarrow c_{Wasser}(m_1+m_2)(T_f-T_0)=c_{Wasser}m_2(T_2-T_0)-c_{Eis}m_1(T_0-T_1)-\lambda_S m_1$$
$$\Rightarrow T_f-T_0=\frac{c_{Wasser}m_2(T_2-T_0)-c_{Eis}m_1(T_0-T_1)-\lambda_S m_1}{c_{Wasser}(m_1+m_2)}$$

In allen Varianten gilt außerdem m_1=m_2, so dass die Masse heraus fällt. Für die ursprüngliche Version 1: m_1=m_2=1 kg; T_1=-10° C; T_2=90° C:

$$T_f-T_0=\frac{c_{Wasser}(T_2-T_0)-c_{Eis}(T_0-T_1)-\lambda_S}{2c_{Wasser}}=$$
$$=\frac{4.18\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}\cdot 90\,\mathrm{K}-2.06\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}\cdot 10\,\mathrm{K}-334\,\mathrm{kJ/kg}}{2\cdot 4.18\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}}=2.58\,\mathrm{K}$$
$$\Rightarrow T_f=2.58^o\ \mathrm{C}$$

Variationen:
m_1=m_2=1 kg; T_1=-5° C; T_2=95° C: T_f=6.32° C
m_1=m_2=1 kg; T_1=-10° C; T_2=95° C: T_f=5.08° C
m_1=m_2=1 kg; T_1=-15° C; T_2=95° C: T_f=3.85° C
m_1=m_2=1 kg; T_1=-5° C; T_2=90° C: T_f=3.82° C
m_1=m_2=1 kg; T_1=-15° C; T_2=90° C: T_f=1.35° C

Wärmeverluste beim Heizen eines Hauses

Sie besitzen einen Bungalow (Haus mit Flachdach), das leicht vereinfachend als quaderförmig mit den Maßen Breite a=12 m, Tiefe b=9 m und Höhe h=3 m beschrieben werden kann. Vereinfachend wird angenommen, dass alle vier Seitenwände (inkl. Fenster), das Dach und der Boden jeweils einen Wärmedurchgangskoeffizienten (=durch das Material tretende Wärmeleistung pro Fläche und Temperaturunterschied zwischen innen und außen) von k=0.5 W/(m^2 K) haben. Alle Wärmequellen im Haus (Heizkörper, etc.) erbringen insgesamt eine maximale Heizleistung von P=5 kW. Nun naht der kalte Winter und Sie möchten wissen, bis zu welcher niedrigsten Außentemperatur $T_{\text{außen}}$ Sie im Haus dauerhaft T_{innen}=20^o C aufrecht erhalten können (vorausgesetzt das Haus wurde vorher schon auf 20^o C aufgeheizt). Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkung: Die Heizleistung soll sich vereinfachend im Haus so verteilen, dass überall im Haus die gleiche Innentemperatur herrscht.

Lösung:
Die gesamte Außenfläche des Hauses setzt sich aus folgenden 6 Flächen (je 2 seitliche Außenwände längs der Breite und Tiefe und Dach und Boden) zusammen:

$$A = 2ah + 2bh + 2ab = 342\,\mathrm{m}^2$$

Im Gleichgewicht geht gerade so viel Wärme durch die Wände verloren, wie die Heizung nachliefert, so dass für den Temperaturunterschied ΔT=T_{innen}-$T_{\text{außen}}$ gilt:

$$P = kA\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{P}{kA} = T_{innen} - T_{außen} \Rightarrow T_{außen} = T_{innen} - \Delta T = -9.2^o\,\mathrm{C}$$

Variationen:
b) a=10 m, b=9 m, h=3 m, P=6 kW, k=0.5 W/(m^2 K) ➔ $T_{\text{außen}}$=-20.8^o C
c) a=7 m, b=9 m, h=3 m, P=4.5 kW, k=0.6 W/(m^2 K) ➔ $T_{\text{außen}}$=-13.8^o C
d) a=8 m, b=6 m, h=3 m, P=5 kW, k=0.6 W/(m^2 K) ➔ $T_{\text{außen}}$=-26.3^o C
e) a=12 m, b=8 m, h=3 m, P=4 kW, k=0.5 W/(m^2 K) ➔ $T_{\text{außen}}$=-5.6^o C
f) a=10 m, b=7 m, h=3 m, P=7.5 kW, k=0.6 W/(m^2 K) ➔ $T_{\text{außen}}$=-31.7^o C

Zentraler Stoß zweier Atomkerne

Ein Alphateilchen (zweifach positiv geladener Helium-Atomkern) der Masse m_1=4 *u* (atomare Masseneinheit *u*) stößt zentral mit einem ebenfalls (mehrfach) positiv geladenen Atomkern der Masse m_2=50 *u* zusammen. Vor dem Stoß befindet sich der schwere Atomkern in Ruhe und das Alphateilchen hat in großer Entfernung von dem Atomkern die Geschwindigkeit v_1=5000 km/s. Mit welcher Geschwindigkeit v_2' bewegt sich der schwere Atomkern nach dem Stoß, wenn sich beide Teilchen wieder sehr weit voneinander entfernt haben (also keine potentielle Energie aufgrund der Ladung vorhanden ist)? Markieren Sie in der Auswahl den der richtigen Lösung am nächsten liegenden Wert.
Anmerkungen: Weder der Atomkern noch das Alphateilchen seien nach dem Stoß in einem anderen (z.B. angeregten) Zustand. Die Summe der kinetischen Energien beider Teilchen bleibt also erhalten.

Lösung:
Eindimensionaler elastischer Stoß mit ruhendem zweiten Teilchen.
Energie- und Impulserhaltung
Impulserhaltung:

$$p = m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1' = \frac{-m_2 v_2' + m_1 v_1}{m_1} = -\frac{m_2 v_2' - m_1 v_1}{m_1}$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

Einsetzen, Kürzen des Faktors ½ und Multiplikation der Gleichung mit m_1 ergibt:

$$m_1^2 v_1^2 = (m_2 v_2' - m_1 v_1)^2 + m_1 m_2 (v_2')^2$$
$$\Rightarrow m_2 (m_1 + m_2)(v_2')^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2' = 0$$
$$\Rightarrow (m_1 + m_2) v_2' = 2 m_1 v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Die zweite Lösung der Gleichung, also v_2'=0, ist ausgeschlossen, da dies bedeuten würde, dass das Teilchen 1 durch das Teilchen 2 „hindurch laufen“ muss.

Für die Werte von oben gilt:
v_2'=740.74 km/s

Varianten:
b) m_1=4 *u*, m_2=200 *u*, v_1=10000 km/s ➔ v_2'=392.2 km/s
c) m_1=4 *u*, m_2=100 *u*, v_1=6000 km/s ➔ v_2'=461.5 km/s
d) m_1=4 *u*, m_2=154 *u*, v_1=10000 km/s ➔ v_2'=506.3 km/s
e) m_1=4 *u*, m_2=103 *u*, v_1=8000 km/s ➔ v_2'=598.1 km/s
f) m_1=4 *u*, m_2=76 *u*, v_1=7000 km/s ➔ v_2'=700.0 km/s