Polardarstellung: $s(t) = |s(t)| \cdot e^{j\varphi(s(t))}$ $\quad \varphi(s(t)) = \arctan\left(\frac{s_I(t)}{s_R(t)}\right)$

Gerade/ungerade Signale: $s(t) = s_g(t) + s_u(t)$

$s_g(t) = \frac{1}{2}(s(t) + s(-t))$

$s_u(t) = \frac{1}{2}(s(t) - s(-t))$

$\int_{-T}^{T} s_u(t)\,dt = 0 \quad \int_{-T}^{T} s_g(t)\,dt = 2\int_0^T s_g(t)\,dt$

$s_g(t) = s_g(-t)$, $s_u(t) = -s_u(-t)$

T-Matrix: behält Ein/Ausgangsverhalten, Eigenwerte von A, Beobachtbarkeit/Steuerbarkeit

Form III Matrix: $A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 - a_1\frac{b_0}{a_0} \\ b_2 - a_2\frac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}$

$c = \frac{1}{a_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Kausales Signal: $s(t) = 0$ für $t < 0$ $\quad$ antikausal: $s(t) = 0$ für $t > 0$

$si(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ $\quad | \; si(0) = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} si(t)\,dt = \pi$

Komplexer Zeiger: $x(t) = e^{st}$, $s = \sigma + j\omega$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$= e^{\sigma t}\cos(\omega t) + j e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$

$e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\sin(\omega)$

$\cos(\omega) = \frac{1}{2}[e^{j\omega} + e^{-j\omega}]$

$\sin(\omega) = \frac{1}{2j}[e^{j\omega} - e^{-j\omega}]$

Ausblendeigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-\tau)\,dt = s(\tau)$ $\quad$ Skalierung:

$s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$ $\quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Ableitung des Dirac:

$\int_{-\infty}^{\infty} \dot\delta(t) s(t)\,dt = -\dot s(t)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) s(t)\,dt = (-1)^n s^{(n)}(0)$

Integral des Dirac: $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \varepsilon(t)$

Faltungsintegral:

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,d\tau$

nicht kommutativ

$E = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\,dt$

$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt$

KKF: $\varphi^E_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau) g^*(t)\,dt$ für $\tau = 0 \to$ Energie des Signals

$\varphi^L_{sg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t+\tau) g^*(t)\,dt$ für $\tau = 0$ Leistung des Signals $\quad$ konjugiert symmetrisch

Fourier Trafo: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j\omega t}\,dt$ $\quad$ Aufteilung $X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(j\omega)}$

$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$

Symmetrie: $x(t)$ reell $\circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

Zuordnung: $x(t) = Re\{x_g(t)\} + Re\{x_u(t)\} + j\,Im\{x_g(t)\} + j\,Im\{x_u(t)\}$

$X(j\omega) = Re\{X_g(j\omega)\} + Re\{X_u(j\omega)\} + j\,Im\{X_g(j\omega)\} + j\,Im\{X_u(j\omega)\}$

Inverse Fourier Trafo:

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega) e^{j\omega t}\,d\omega$

Faltungssatz: $y(t) = x(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

Multsatz: $y(t) = f(t) \cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * G(j\omega)$

Dualität $f_1 \circ\!\!-\!\!\bullet f_2(\omega)$

$\to f_2 \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi f_1(-\omega)$

Laplace Trafo $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$

Impulsantwort:

$h(t) = \varepsilon(t)$ Integrierer

$h(t) = \dot\delta(t)$ Differenzierer

Allgemeine DGL: $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{k=0}^{N} \beta_k \frac{d^k x}{dt^k}$ $\quad \alpha_N \neq 0$

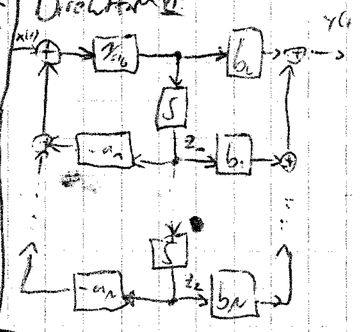
$\Downarrow$

$\sum_{i=0}^{N} a_i \int_i y\,dt = \sum_{k=0}^{N} b_k \int_k x\,dt$

Integrierer: $u_2(t) = \frac{1}{RC}\int u_1(t)\,dt$

$a_i = \alpha_{N-i}$, $b_k = \beta_{N-k}$

Direktform II:



Beliebige I/O:

M: Eingänge

K: Ausgänge

Z: Zustandsgrößen

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix}$ $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1M} \\ B_{N1} & B_{NM} \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ C_{K1} & \cdots & C_{KN} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1M} \\ D_{K1} & \cdots & D_{KM} \end{bmatrix}$

Zustandsgleichung: $\dot z = Az + Bx$ $\quad$ Systemmatrix, Spaltenvektor

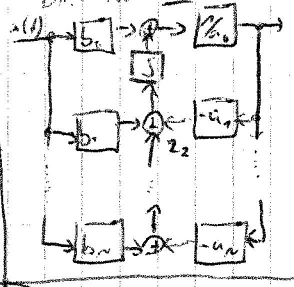
$y = Cz + Dx$ $\quad$ Zeilenvektor, konstante, Spaltenvektor

x: Eingang

y: Ausgang

z: Zustand

Direktform III



$A_{III} = A_{II}^T$; $B_{III} = C_{II}^T$; $C_{III} = B_{II}^T$

$D_{III} = D_{II}$

$\hat A = T^{-1}AT$ $\quad \hat B = T^{-1}B$ $\quad$ Äquivalenztrafos

$\hat C = CT$ $\quad \hat D = D$

~~Äquivalenz~~ Trafos

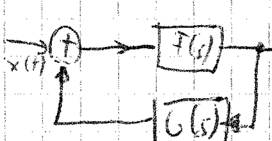
Frobeniusmatrix $\hat A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_N}{a_0} & -\frac{a_{N-1}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}$

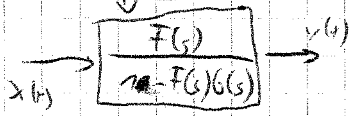
$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_N \end{bmatrix} x$$

Blockdiagramm bei Parallelform

$$y = [\hat{c}_1 \dots \hat{c}_N]\, \hat{z}$$

Rückkopplung: $Q(s)$





Systemfunktion: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

$x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion von LTI-Systemen

Systemfkt zu DGL:

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s^n Y(s) = \sum_{m=0}^{M} \beta_m s^m X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} \beta_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} \alpha_n s^n}$$

Für mehrere LTIs:

$$x(t) \Rightarrow [E - F(s)G(s)]^{-1} F(s) \Rightarrow y(t)$$

Zustandsraum:

$$H(s) = C\left[E - \frac{1}{s}A\right]^{-1} \frac{1}{s} B + D = C[sE - A]^{-1} B + D$$

Anfangszustand

$$x(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \\ \ddot{x}(0) \\ \vdots \\ x^{N-1}(0) \end{bmatrix} \quad y(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0) \end{bmatrix}$$

$$z(0) = W^{-1}[y(0) - V x(0)]$$

$$Y(s) = H(s) X(s) + G(s) W^{-1} [y(0) - V x(0)]$$

$$V = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & D \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

Reellwertige Systeme:

$$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{H(-j\omega)\}$$
$$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{H(-j\omega)\}$$
$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$$
$$b(\omega) = -\arg\{H(j\omega)\} = \arg\{H(-j\omega)\} = -b(-\omega)$$

Dämpfungsmaß: $a(\omega) = -20 \log_{10}(|H(j\omega)|)\ dB$

Phasenlaufzeit: $t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$

~~Phase der LTI~~ $\cancel{\varphi(\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}}$

Allpass: $H(s) = H_M(s) + H_A(s)$

$$H_A(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{M} (s - \beta_i)}{a_m \prod_{i=1}^{M} (s - \alpha_i)}$$

Hilbert Trafo: $h(t)$ kausal und kein Dirac bei $t=0$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{\pi} H(j\omega) * \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\{H(j\omega)\} * \frac{1}{\omega} =: \mathcal{H}\{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}\}$$

$$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\} = -\frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} * \frac{1}{\omega} =: -\mathcal{H}\{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}\}$$

$$\mathcal{H}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{\pi} X(j\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

$\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = P(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \Rightarrow \mathrm{sgn} \Rightarrow \mathcal{F} \Rightarrow j\,Q(\omega)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow \hat{x}(t)$$
$$x(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{x}(t)$$
$$X(j\omega) \cdot -j\,\mathrm{sgn}(\omega) = \hat{X}(j\omega)$$

analytisches Signal: $x_+(t) = x(t) + j\mathcal{H}\{x(t)\}$

$$h_g(t) = \mathrm{sgn}(t) \cdot h_u(t) \qquad h(t) = h_g(t) + h_u(t)$$
$$h_u(t) = \mathrm{sgn}(t) \cdot h_g(t) \qquad H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$Q(\omega) = -\mathcal{H}\{P(\omega)\} \qquad P(\omega) = \mathcal{H}\{Q(\omega)\}$$

$$V_g(j\omega) = \mathrm{sgn}(\omega) \cdot V_u(j\omega) \qquad V(j\omega) = V_g(j\omega) + V_u(j\omega)$$
$$V_u(j\omega) = \mathrm{sgn}(\omega) \cdot V_g(j\omega) \qquad v_+(t) = v(t) + j\hat{v}(t)$$

$$\hat{v}(t) = \mathcal{H}\{v(t)\} \qquad v(t) = -\mathcal{H}\{\hat{v}(t)\}$$

Stabilität: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < M_2 < \infty$

Stabilität: Konvergenzbereich enthält $j\omega$ Achse

Kausalität: KB rechts aller Singularitäten $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma$

Stabilität durch Rückkopplung:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + kH(s)} \quad ?$$

Hurwitzpolynom im Nenner → stabil

$$s^q + a_1 s^{q-1} + a_2 s^{q-2} + \dots + a_q$$

- Alle Koeff. positiv
- Für $q = 1$ oder $q = 2$ stabil
- Für $q > 2$ alle Hurwitz dets. müssen positiv sein

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_{2M-1} & a_{2M-2} & \dots & & & a_M \end{vmatrix}$$

Abtastung: $\perp\!\!\perp\!\!\perp(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta(t - \mu) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-j\mu\omega}$

$$\frac{1}{T} \perp\!\!\perp\!\!\perp\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \perp\!\!\perp\!\!\perp\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_a(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \mu\omega_a))$$

Aliasing bei: $\omega_g > \frac{\pi}{T}$