Aufgabe 1 (13 Punkte)

a) Es seien $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{2, 3\}, \Omega\}$ gegeben. Welche Menge muss zu $\mathcal{E}$ hinzugefügt werden, damit eine σ-Algebra über Ω entsteht?

$$\mathcal{E} \cup \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\} \quad \text{ist eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

b) Für welchen Parameter $c \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion f mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ eine W-Dichte?

$$f(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-a)^2}{b^2}}, \quad c = \qquad\qquad\qquad , x \in \mathbb{R}$$

c) Wie ist die Verteilungsfunktion F^Z zur Dichte f^Z einer über $\mathbb{R}$ verteilten Größe z definiert?

$$F^Z(z) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

d) Wie heißt für $p \in [0, 1]$ die Verteilungsfunktion mit der diskreten Dichte

$P(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$?

e) Es seien U, V stochastisch unabhängig verteilt mit Dichten f^U, f^V. Wie lautet der Ansatz für die gemeinsame Dichte $f^{(U,V)}$? $f^{(U,V)}(u, v) = \boxed{\qquad\qquad}$

f) Z_1, Z_2 seien id. st. u. verteilt mit Varianz σ^2:

$\mathrm{Var}(Z_1 + Z_2) =$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Var}(2Z_1) =$

g) Es seien Y_1, Y_2 st. u. id. $\mathrm{Nb}^+(n, p)$ verteilt, dann gilt:

$Y_1 + Y_2 \sim$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{E}[Y_1 + Y_2] =$

h) Es sei $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Wie lautet die Normalapproximation für S_n?

$$P(S_n \leqslant m) \approx \mathcal{N}\left(\qquad\qquad , \qquad\qquad \right)$$

i) Für die Zufallsvariablen Y, X_1, X_2 existieren $\mathrm{Kov}(X_1, Y)$ und $\mathrm{Kov}(X_2, Y)$. Dann gilt

$$\mathrm{Kov}(X_1 + X_2, Y) =$$

j) X besitzt Z-Dichte $P(n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{6}{\pi^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. $E(X) =$