Mathematik für Ingenieure C4

Klausur Teil 2

SoSe 2018
26. Juli 2018
Dr. W. Rathmann

Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2–4 den kompletten Lösungsweg in nachvollziehbarer Weise an. Schreiben Sie auch Nebenrechnungen mit auf. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

In einem Spielzeugautomat kann mit einem Kran ein Spielzeug geangelt werden. Dieser Ausgangszustand „Vorfreude" ist der Zustand 1. Mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ ist das Angeln nicht erfolgreich. Es wird solange versucht, ein Spielzeug zu angeln, bis dies einmal erfolgreich ist. Wenn ein Spielzeug geangelt wurde, ist das Spiel vorbei; das Spiel bleibt im Zustand „Freude" (Zustand 2).

a) (2 Punkte) Beschreiben Sie dieses Modell mit einer Markow-Kette.
Geben Sie den Graphen und die Übergangsmatrix an.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Startverteilung $p^{(0)} = (1,0)$ die Verteilung nach $k \in \mathbb{N}$ Schritten lautet:
$$p^{(k)} = \left(\alpha^k, 1 - \alpha^k\right)$$

c) (1 Punkt) Welcher Zustand wird langfristig erreicht?

d) (2 Punkte) Mit welchem Wahrscheinlichkeitsmodell kann dieses Spiel auch beschrieben werden? (Geben Sie dazu einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum an.)

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Seien X_1, X_2 zwei unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1, X_2 \sim \mathcal{R}_{(0,1)}$. Ferner gelte $Y_1 = X_1^2$ und $Y_2 = X_1 + X_2$.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie $\mathrm{E}[Y_1]$ und $\mathrm{E}[Y_2]$.

b) (5 Punkte) Geben Sie die R-Dichte $f^{Y_2}(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ der Zufallsvariable Y_2 an und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei der Zufallsvektor $Y = (Y_1, Y_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ und es gelte $Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ mit $\mathbf{a} = (1,2)^\top$ und $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Weiterhin sei für $\beta \in \mathbb{R}$ der Zufallsvektor X durch die folgende Transformation gegeben:

$$\begin{aligned} X_1 &= -1 + Y_1, & (1) \\ X_2 &= -1 - \beta Y_1 + Y_2 & (2) \end{aligned}$$

a) (2 Punkte) Geben Sie einen Vektor $\mathbf{b}$ und eine Matrix $\mathbf{B}_\beta$ an so, dass $X = \mathbf{b} + \mathbf{B}_\beta Y$ gilt.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X.
(Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{c}_\beta$ und die Matrix $\mathbf{C}_\beta$, so dass $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{c}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$.)

c) (2 Punkte) Wie muss β gewählt werden, damit X standardnormalverteilt ist.