Aufgabe 1 - Sortieren

Das Sortieren von (grossen) Datenmengen ist eine der wichtigsten Aufgaben im heutigen Computerzeitalter. Ein einfacher Algorithmus zur Sortierung von ganzen Zahlen ist der sogenannte BubbleSort. Die Idee ist, dass eine einzelne Zahl bereits sortiert ist. Nimmt man eine zweite Zahl hinzu, so muss diese Zahl mit ihrem Nachbarn den Platz tauschen, wenn die Sortierung noch nicht stimmt, ansonsten verbleibt sie an ihrem Platz. Das Verfahren läßt sich verallgemeinern, wenn man eine weitere Zahl in eine bereits sortierte Zahlenreihe einfügt. Diese neue Zahl steigt dann wie eine Blase an den Platz, der ihrem Wert entspricht.

1. Sortiere mit dem oben skizzierten Algorithmus die folgende Zahlen in absteigender Reihenfolge:

   8 0 4 9 2 7 3 5 6 1

2. Gebe jeweils die günstigste und ungünstigste Ausgangssituation an, wenn die Zahlen 0 bis 9 aufsteigend sortiert werden sollen. Wie viele Vertauschungen werden benötigt? Wie viele Vergleiche?

Lösung

1. Im ersten Schritt hat man nur die 8. Nachdem eine einzelne Zahl bereits sortiert ist, nimmt man im nächsten Schritt die 0 dazu. Da wir absteigend sortieren wollen, muss $8 > 0$ gelten. Jeder wird zustimmen, dass das wohl korrekt ist. Schritt 3 nimmt nun die 4 hinzu. Da $0 > 4$ wohl falsch ist, tauscht man die beiden Zahlen und erhält mit $4 > 0$ eine korrekte Sortierung. Nachdem wir hier einen (dummer) Computer "simulieren", müssen wir noch den Vergleich $8 > 4$ machen. Dieser stimmt und unsere bisherige Zahlenreihe ist nun wieder sortiert

   8 4 0.

   Nun nehmen wir die 9 hinzu. Wieder vergleichen wir $0 > 9$ und vertauschen, dann $4 > 9$ und vertauschen erneut. Der letzte Vergleich ($8 > 9$) führt zu einer weiteren Vertauschung. Damit ist unser bisher Zahlenreihe wieder sortiert und wir können die nächste Zahl einsortieren usw. Das Endergebnis sollte eigentlich klar sein:

   9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2. Die günstigeste Sortierung ist eine bereits (aufsteigend) sortierte Zahlenreihe:

   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

   Die 0 ist selbst wieder sortiert, da nun $0 < 1$ gilt ist auch 0 1 sortiert und so weiter. Also werden 9 Vergleiche benötigt um festzustellen, dass die Zahlenreihe sortiert ist. Dabei müssen 0 Vertauschungen gemacht werden.
   Die ungünstigste Sortierung ist eine absteigend sortierte Zahlenreihe:

   9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

   Auch hier ist die 9 selbst wieder sortiert, aber $9 < 8$ stimmt wohl kaum. Also müssen wir tauschen, damit unsere Zahlenreihe sortiert ist. Nun ist aber $9 < 7$ wieder nicht korrekt $\Rightarrow$ tauschen. Mmmh... nun ist $8 < 7$ auch falsch, also wieder tauschen. So setzt sich das fort, bis unsere Zahlenreihe komplett aufsteigend sortiert ist. Dafür benötigen wir aber

   $$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \quad = \quad 45$$

   Vergleiche und ebensoviele Vertauschungen.

Bemerkungen

Der hier vorgestellte BubbleSort ist ein sehr einfacher Algorithmus, der sich nur für wirklich kleine Datenmengen (< 10 Elemente) eignet. Durch ein paar Veränderungen kann man diesen Algorithmus noch etwas verbessern, aber leider nicht sehr viel. Aus diesem Grund haben sich viele Leute Gedanken zum Sortierproblem gemacht und viele verschiedene Algorithmen entwickelt (z.B. InsertionSort, SelectionSort, Quicksort, MergeSort oder HeapSort)

22. Juni 2006 Algorithmik FSI Informatik
Homepage der Fachschaft: `http://fsi.informatik.uni-erlangen.de`
Emailaddresse der Fachschaft: `fsi@informatik.uni-erlangen.de`

Aufgabe 2 - Formale Grammatiken und Sprachen

In der Informatik versteht man unter einer Sprache L eine Menge aus Wörtern, die aus Zeichen eines beliebigen Alphabets Σ bestehen. Für unsere Aufgabe wählen wir uns das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.
Ein mögliche Sprache L wäre zum Beispiel: $\{aba, aca, ada, bab, bcb, bdb\}$.
Ein Sprache kann man somit einfach über die Menge aller gültigen Wörter definieren. Nun ist es leicht zu überprüfen ob ein Wort in einer Sprache enthalten ist oder nicht. Jedoch hat man es auch oft mit Sprachen zu tun, die aus unendlich vielen Wörtern bestehen, so z.B. die Sprache, bei der ein Wort mit zwei a beginnen muss und dann kein oder beliebig viele b folgen dürfen, also: $\{aa, aab, aabb, aabbb, aabbb, ...\}$
Um solche unendlichen Sprachen beschreiben zu können benutzt man sogenannte formale Grammatiken.
Eine Grammatik G besteht aus:

- einer Menge T an Terminalsymbolen.
- einer Menge N an Nichtterminalsymbolen, wobei N und T disjunkt sind.
- einem Startsymbol S, das in N enthalten ist
- und einer Menge P an Produktionsregeln.

Eine Produktionsregel hat eine linke Seite und eine rechte Seite. In unserem Fall steht auf der linken Seite immer ein Zeichen aus N. Dieses Nichtterminal darf dann im Wort durch die Rechte Seite ersetzt werden. Hat man also zum Beispiel das Wort aAb und die Produktionsregel $A \to aa$, so wird aus $aAb \to aaab$. Auf der rechten Seite dürfen jedoch auch wieder Zeichen aus N stehen. Alle Wörter einer Sprache müssen sich mit Hilfe der Regeln aus P aus dem Startsymbol S erzeugen lassen. Es ist durchaus möglich, dass man mehrere Regeln anwenden kann.

Bestimme nun welche der folgenden Wörter in der aus G erzeugten Sprache L enthalten sind:

$$aabb, ab, ac, aadd, cccddd, bdd, aab, ccaadd$$

Grammatik G:

- $T = \Sigma = \{a, b, c, d\}$
- $N = \{A, B, C, D, S, X, Y\}$
- S ist das Startsymbol
- P:

$$\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc}
S & \to & X & S & \to & Y \\
X & \to & AXB & X & \to & AB \\
Y & \to & CYD & Y & \to & CD \\
A & \to & a & B & \to & b \\
C & \to & c & D & \to & d
\end{array}$$

Lösung

$aabb, ab, cccddd \in L$, da

$$S \to X \to AXB \to AABB \to aABB \to \ldots \to aabb$$

$$S \to X \to AB \to aB \to ab$$

$$S \to Y \to CYD \to CCYDD \to CCCDDD \to \ldots \to cccddd$$

Folgende Wörter sind nicht in der Sprache L enthalten:

$$ac, add, bdd, aab, ccaadd$$

Aufgabe 3 - Direkter und indirekter Beweis

Direkter Beweis:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch):

Für ungerade Zahlen a, b, c hat

$$ax^2+bx+c=0$$

keine rationale Lösung x.

Hinweise

Indirekter Beweis:

Eine Zahl x ist rational, wenn sie sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt:

$$x=\frac{p}{q}\wedge q\neq 0\wedge p,q\in\mathbb{Z}$$

Die Idee des Indirekten Beweises bzw. des Beweises durch Widerspruch ist es, das Gegenteil der Behauptung anzunehmen und diese Aussage zu einem Widerspruch zu führen.

Lösung

Direkter Beweis:

Schreibe die Zahlenfolge einmal aufsteigend und einmal absteigend sortiert untereinander und addiere die untereinanderstehenden Zahlen:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\
n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \\
\hline
1+n & 2+(n-1) & 3+(n-2) & \ldots & (n-1)+2 & n+1
\end{array}$$

Man erhält also n-mal die Summe $n+1$. Da man in diesem Fall jedoch alle Zahlen doppelt addiert hat, dividiert man das Ergebnis noch durch 2.

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Homepage der Fachschaft:	`http://fsi.informatik.uni-erlangen.de`
Emailaddresse der Fachschaft:	`fsi@informatik.uni-erlangen.de`

Indirekter Beweis:

Annahme: Es sei $x=\frac{n}{m}$ mit teilerfremde $n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow a\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c=0\Rightarrow an^2+bnm+cm^2=0$$

Da m und n teilerfremd sind, können nicht beide gerade sein.

- Annahme: n ist gerade:
  $\Rightarrow an^2+bnm$ ist gerade $\Rightarrow cm^2$ muss gerade sein, denn sonst kann die Summe nicht 0 ergeben. $\Rightarrow m$ muss gerade sein (Widerspruch!)
- Annahme: m ist gerade: $\Rightarrow bnm+cm^2$ ist gerade $\Rightarrow an^2$ muss gerade sein, denn sonst kann die Summe nicht 0 ergeben. $\Rightarrow n$ muss gerade sein (Widerspruch!)

Also müssen n, m ungerade sein, damit wäre aber auch $an^2+bnm+cm^2$ ungerade und man hat ebenfalls einen Widerspruch, da 0 nicht gerade ist.

Homepage der Fachschaft:	`http://fsi.informatik.uni-erlangen.de`
Emailaddresse der Fachschaft:	`fsi@informatik.uni-erlangen.de`

Aufgabe 4 - Lineare Gleichungssysteme

Löse die folgenden Gleichungssysteme (z. B. mit Hilfe des Gausschen Eliminationsverfahrens) mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_3 & = & 1.5 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}$$

2.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= \lambda x_2 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \end{aligned}$$

(Fallunterscheidung bzgl. $\lambda \in \mathbb{R}$)

Lösung

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_3 & = & 1.5 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & 16x_2 & + & 6x_3 & = & -10 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & & & 2x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & & & 14x_3 & = & 14 \end{array} \Rightarrow \quad x_1 = 1 \wedge x_2 = -1 \wedge x_3 = 1$$

2.
$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & x_2 & = & \lambda x_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & \lambda x_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & (1+\lambda)x_2 & = & 0 \\ (2-\lambda)x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & (1+\lambda)x_2 & = & 0 \\ & & \frac{4+(2-\lambda)(\lambda+1)}{4}x_2 & = & 0 \end{array}$$

Wenn nun $4 + (2-\lambda)(\lambda+1) \neq 0$ gilt, dann gibt es nur die triviale Lösung:

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

Für $\lambda = -2$ erhält man:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_1 = c \wedge x_2 = 4c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Für $\lambda = 3$ erhält man:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$x_1 = c \wedge x_2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5 - Zahlensysteme

1. Konvertiere die folgende Hexadezimalzahl ins Binär- bzw. Tertiärsystem:

$$\begin{aligned} (A03)_{16} &= (?)_2 \\ (A03)_{16} &= (?)_3 \end{aligned}$$

2. Konvertiere die folgende Binärzahl ins Oktal- bzw Tertiärsystem:

$$\begin{aligned} (11100111)_2 &= (?)_8 \\ (11100111)_2 &= (?)_3 \end{aligned}$$

3. Multiplikation im Dualsystem: 11101010×1011

4. Addition im Hexadezimalsystem:
$$\begin{array}{cccccccccc} & B & 6 & 7 & 4 & F & C & 1 & 2 \\ + & 2 & D & A & 9 & D & 4 & B & 2 \\ \hline = & & & & & & & & \end{array}$$

Lösung

1.
$$\begin{aligned} (A03)_{16} &= (101000000011)_2 \\ (A03)_{16} &= (10111221)_3 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (11100111)_2 &= (347)_8 \\ (11100111)_2 &= (22120)_3 \end{aligned}$$

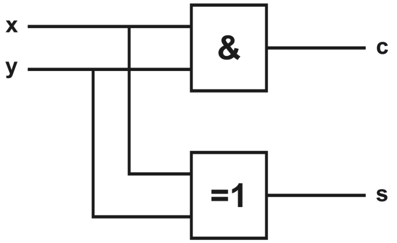
3.
$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{ccccccccc} & B & 6 & 7 & 4 & F & C & 1 & 2 \\ + & 2 & D & A & 9 & D & 4 & B & 2 \\ \hline = & E & 4 & 1 & E & D & 0 & C & 4 \end{array}$$

Emailaddresse der Fachschaft: `fsi@informatik.uni-erlangen.de`

Aufgabe 6 - Logische Schaltungen

Gatter sind elementare Bausteine von logischen Schaltungen. Es gibt Gatter mit unterschiedlichen Funktionen. Die folgende Schaltung hat zwei Eingänge (x, y) und zwei Ausgänge (c, s). Desweiteren enthält sie ein sogenanntes AND-Gatter, sowie ein XOR-Gatter. Versuche mit Hilfe der Wertetabellen für AND- und XOR-Gatter die Wertetabelle für die gesamte Schaltung aufzustellen. Welchem Zweck könnte eine solche Schaltung dienen?



x	y	
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

x	y	
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Tabelle 0.1: AND- und XOR-Gatter

Lösung

Als Wertetabelle ergibt sich:

x	y	c	s
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	0

Diese Schaltung wird als Halbaddierer bezeichnet und kann zwei einstellige Binärzahlen addieren.

Aufgabe 7 - Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichne $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen (kurz "Zahlen" genannt) und $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Für Zahlen a, b mit $a \neq b$ wird definiert "a teilt b", wenn es ein c gibt mit $b = ac$, in Zeichen $a \mid b$. Wir sagen auch a ist ein Teiler (oder Faktor) von b und b ist ein Vielfaches von a. Die Notation $a \nmid b$ bedeutet: a ist kein Teiler von b.

Bearbeite die folgenden Punkte, d. h. finde jeweils (mindestens) ein Zahlenbeispiel und versuche die Aussagen durch Anwendung der Defintion der Teilbarkeit allgemein zu beweisen:

1. Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so gilt auch $a \mid c$
2. Gilt $c \mid a$ und $c \mid b$, so gilt für beliebige weitere Zahlen m und n auch $c \mid ma + nb$.
3. Ist folgende Aussage im Bereich der ganzen Zahlen korrekt?
$$(a \mid b \wedge b \mid a) \Leftrightarrow a = b$$
4. Gibt es Zahlen a, b, c mit $a \mid bc$ aber $a \nmid b$ und $a \nmid c$?

Lösung

1. Beispiel: $2 \mid 4$ und $4 \mid 12$, so gilt auch $2 \mid 12$
$$a \mid b \Rightarrow \exists x : b = ax$$
$$b \mid c \Rightarrow \exists y : c = by$$
$$\Rightarrow c = (ax)y \Rightarrow c = (xy)a \Rightarrow \exists z : c = za \Rightarrow a \mid c$$
2. Beispiel: $3 \mid 6$ und $3 \mid 9$: $3 \mid 39 (= 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9)$
$$c \mid a \Rightarrow \exists x : a = cx$$
$$c \mid b \Rightarrow \exists y : b = cy$$
$$\Rightarrow ma + nb = m(cx) + n(cy) = c(mx + ny) \Rightarrow c \mid ma + nb$$
3. Die Aussage ist im Bereich der ganzen Zahlen **nicht** korrekt.
$$4 \mid -4 \wedge -4 \mid 4 \text{ aber } 4 \neq -4$$
Hinweis: Im Bereich der natürlichen Zahlen ist diese Aussage jedoch korrekt.
4. Ja es gibt solche Zahlen:
$$4 | 12 (= 6 \cdot 2) \wedge 4 \nmid 2 \wedge 4 \nmid 6$$
.

Aufgabe 8 - Tatort Hörsaal

Wenn der Professor nicht im Hörsaal war, als der Mord geschah, konnte er nicht wissen, welche Waffe benutzt wurde. Entweder lügt der Student oder er kennt den Mörder. Falls der Assistent nicht der Mörder war, so war der Professor zur Tatzeit im Hörsaal oder der Student lügt. Entweder kennt der Student den Mörder oder der Professor war zur Tatzeit nicht im Hörsaal. Der Detektiv zieht folgenden Schluss: Falls der Professor über die Waffe Bescheid weiß, war der Assistent der Mörder. Hat der Detektiv recht?